$\boxed{1}$

(1) $p=a^2-a+2ab+b^2-b$

$=(a+b)^2-(a+b)$

$=(a+b)(a+b-1)$

$a+b$, $a+b-1$ は整数で, $a+b>a+b-1\geqq 1$

p は素数であるから

$a+b-1=1$ かつ $a+b=p$

$a+b=2$, $a\geqq 1$, $b\geqq 1$ より $a=b=1$ このとき $p=2$ (素数)

$\therefore \underline{\underline{a=1,\ b=1}}$ …(答)

(2) $\sqrt{2}\sin x-1=\sqrt{6}\cos x+1$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\pi\leqq x<\pi$ より $-\pi-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}<\pi-\frac{\pi}{3}$

$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{4}\pi,\ \frac{\pi}{4}$

$\therefore x=\underline{\underline{-\frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi}}$ …(答)

(3) 選ばれたカードに書かれた数が偶数である事象をA, 選ばれたカードに書かれた数が n 以下である事象をBとすると 求める確率は $P_A(B)$ である.

$P(A)=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$ より

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=2P(A\cap B)$$

(i) n が偶数のとき, $P(A\cap B)=\frac{\frac{n}{2}}{2n}=\frac{1}{4}$

(ii) n が奇数のとき, $P(A\cap B)=\frac{\frac{n-1}{2}}{2n}=\frac{n-1}{4n}$

よって 求める確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\underline{\underline{\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n\text{が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{n-1}{2n} & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}}}\quad\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$

(1) すべての実数 x に対して $x^2+(a+1)x+2a>0$ が成り立つ ---①

$x^2+(a+1)x+2a=0$ の判別式を D とすると

①を満たすのは $D<0$ のときである.

$D=(a+1)^2-4\cdot 2a=a^2-6a+1<0$

$\underline{\underline{3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}}}$ --- (答)

(2) $bx^2+tx+(b+t)<0$ を満たす実数 x が存在する ---②

(i) $b=0$ のとき

$tx+t<0$

$t(x+1)<0$

$t>0$ より $x+1<0$ $x<-1$.

よって $b=0$ のとき ② が成り立つ.

(ii) $b>0$ のとき ②を満たすのは

$bx^2+tx+(b+t)=0$ の判別式 $D=t^2-4b(b+t)>0$ のときである.

$b^2+tb-\dfrac{t^2}{4}<0$

$\dfrac{-(\sqrt{2}+1)}{2}\cdot t<b<\dfrac{(\sqrt{2}-1)}{2}\cdot t$ ($\because t>0$)

よって $b>0$ より $0<b<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot t$

(iii) $k<0$ のとき

$y=kx^2+tx+(k+t)$ のグラフは上に凸の放物線なので

②を満たす.

よって (i),(ii),(iii) より　　$k<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t$ ---(答)

(3)　　$A \cap B$ が空集合でない ---③

$$\begin{cases} 3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2} & \text{---④} \\ x<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t & \text{---⑤} \end{cases}$$

③を満たすのは ④,⑤より　$3-2\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t$ のときである.

$$\frac{2(3-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}<t$$

$$2(\sqrt{2}-1)<t$$ ---(答)

3−1

$a_1=0,\ b_1=1$

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\sqrt{3}\,b_n \\ b_{n+1}=-\sqrt{3}\,a_n+b_n \end{cases} \quad —①$$

(1) ①より $\underline{\underline{a_2=\sqrt{3},\ a_3=2\sqrt{3},\ a_4=0,\ b_2=1,\ b_3=-2,\ b_4=-8}}$ …(答)

(2)（証明）①より

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2}+\sqrt{3}\,b_{n+2} \\ &= (a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1})+\sqrt{3}(-\sqrt{3}\,a_{n+1}+b_{n+1}) \\ &= -2(a_{n+1}-\sqrt{3}\,b_{n+1}) \\ &= -2\{(a_n+\sqrt{3}\,b_n)-\sqrt{3}(-\sqrt{3}\,a_n+b_n)\} \\ &= -2\cdot 4a_n \\ &= -8a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+3} &= -\sqrt{3}\,a_{n+2}+b_{n+2} \\ &= -\sqrt{3}(a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1})+(-\sqrt{3}\,a_{n+1}+b_{n+1}) \\ &= -2(\sqrt{3}\,a_{n+1}+b_n) \\ &= -2\{\sqrt{3}(a_n+\sqrt{3}\,b_n)+(-\sqrt{3}\,a_n+b_n)\} \\ &= -2\cdot 4b_n \\ &= -8b_n \end{aligned}$$

以上より，すべての自然数nに対して $a_{n+3}=-8a_n,\ b_{n+3}=-8b_n$

が成り立つ.

（証明終）

(3) 数列 $\{a_n\}$ において (2) より k を自然数として

$$\begin{cases} n=3k-2 \text{ のとき} & a_{3k+1}=-8a_{3k-2}\text{. よって } a_{3k-2}=a_1\cdot(-8)^{k-1}=0 \\ n=3k-1 \text{ のとき} & a_{3k+2}=-8a_{3k-1}\text{, よって } a_{3k-1}=a_2\cdot(-8)^{k-1}=\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1} \\ n=3k \text{ のとき} & a_{3k+3}=-8a_{3k}\text{. よって } a_{3k}=a_3\cdot(-8)^{k-1}=2\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1} \end{cases}$$

以上より

$$\sum_{n=1}^{9}a_n=\sum_{k=1}^{3}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{3}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{3}a_{3k}=\sum_{k=1}^{3}(a_{3k-1}+a_{3k})$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\left\{\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1}+2\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1}\right\}=\sum_{k=1}^{3}3\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}\{1-(-8)^3\}}{1-(-8)}=\frac{3\sqrt{3}\times 513}{9}=\underline{\underline{171\sqrt{3}}}\ \cdots(\text{答})$$

(4) (3) と同様に，数列 $\{b_n\}$ において

$$b_{3k-2}=b_1\cdot(-8)^{k-1}=(-8)^{k-1},\quad b_{3k-1}=b_2\cdot(-8)^{k-1}=(-8)^{k-1},\quad b_{3k}=b_3\cdot(-8)^{k-1}=-2\cdot(-8)^{k-1}$$

よって，$b_{2020}=b_{3\times674-2}=(-8)^{674-1}=(-8)^{673}$.

一方，

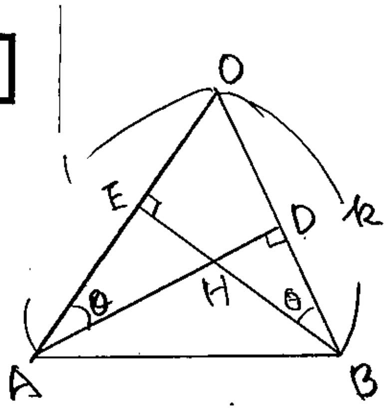
$$\sum_{n=1}^{2020}a_n=\sum_{k=1}^{674}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{673}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{673}a_{3k}=\sum_{k=1}^{673}(a_{3k-1}+a_{3k})$$

$$=\sum_{k=1}^{673}3\sqrt{3}\cdot(-8)^{k-1}=\frac{3\sqrt{3}\{1-(-8)^{673}\}}{1-(-8)}=\frac{1-(-8)^{673}}{\sqrt{3}}$$

よって，

$$T=\frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020}+\sum_{n=1}^{2020}a_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-8)^{673}+\frac{1-(-8)^{673}}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}\ \cdots(\text{答})$$

$\boxed{3-2}$



$\triangle AOD$ と $\triangle BOE$ について

$\angle AOD = \angle BOE$, $\angle ADO = \angle BEO = \frac{\pi}{2}$ より

$\triangle AOD \sim \triangle BOE$

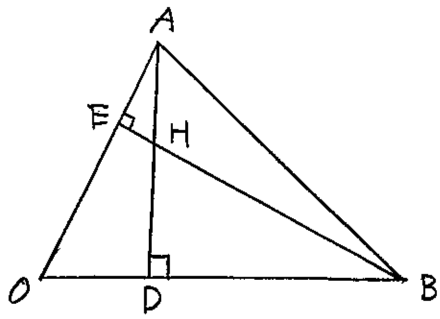
よって $\angle OBE = \theta \ (= \angle OAD)$

(1) $OD = OA\sin\theta = \underline{\underline{\sin\theta}}$ …(答)

$OE = OB\sin\theta = \underline{\underline{k\sin\theta}}$ …(答)

#2

(2) メネラウスの定理より



$$\frac{AH}{HD}\cdot\frac{DB}{BO}\cdot\frac{OE}{EA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AH}{HD}\cdot\frac{k-\sin\theta}{k}\cdot\frac{k\sin\theta}{1-k\sin\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AH}{HD} = \frac{1-k\sin\theta}{(k-\sin\theta)\sin\theta}$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{(1-k\sin\theta)+(k-\sin\theta)\sin\theta}\left\{(k-\sin\theta)\sin\theta\,\overrightarrow{OA} + (1-k\sin\theta)\,\overrightarrow{OD}\right\}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta}\left\{(k-\sin\theta)\sin\theta\,\overrightarrow{OA} + (1-k\sin\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{k}\,\overrightarrow{OB}\right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\left\{(k-\sin\theta)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{k}-\sin\theta\right)\overrightarrow{OB}\right\}}} \quad \cdots(答)$$

(3). Gは△OABの重心だから、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

(2)のGとGが一致し、$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$は一次独立だから

$$\frac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}=\frac{1}{3}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから $\sin\theta\neq 0$ より

$$k-\sin\theta=\frac{1-k\sin\theta}{k}$$

これから $k^2=1$　$k>0$ より $k=1$.

このとき $$\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1}{3}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2}$$ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{6}$

これから $\underline{k=1,\ \theta=\frac{\pi}{6}}$ …(答)

3−3

(1) $P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,　$P(B)=\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{5}{9}$

事象$A\cap B$は 1個のさいころを3回投げた結果、出る目の数が 2, 4, 6 であるから

$$P(A\cap B)=\frac{3!}{6^3}=\frac{1}{36}$$

$\therefore$ $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$　よって AとBは独立ではない。--- (答)

(2) k ($k=1, 2, 3$) 回目に投げたさいころの出る目の数をX_kとすると $X_k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

X_k	1	2	3	4	5	6	計
X_k^2	1	4	9	16	25	36	／
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X_k)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$　($k=1, 2, 3$)

$E(X_k^2)=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+25\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$

$\therefore$ $V(X_k)=E(X_k^2)-\{E(X_k)\}^2$

$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$　($k=1, 2, 3$)

$X=X_1+X_2+X_3$ であるから

$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)$

$=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{7}{2}\times3=\frac{21}{2}$

X_1, X_2, X_3は独立なので

$V(X)=V(X_1+X_2+X_3)$

$=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)$

$=\frac{35}{12}\times3=\frac{35}{4}$

$Y=2X$ より

$$\left.\begin{aligned}E(Y)&=E(2X)=2E(X)=2\times\frac{21}{2}=\underline{\underline{21}}\\ V(Y)&=V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{35}{4}=\underline{\underline{35}}\end{aligned}\right\}\cdots(答)$$

(3) 3回ともさいころの出る目の数が 2以上5以下である確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3$

このうち 3回とも出る目の数が 2以上4以下である確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3$

1 $\boxed{2 \quad 3 \quad 4}$ 5 6

3回とも出る目の数が 3以上5以下である確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^3$

1 2 $\boxed{3 \quad 4 \quad 5}$ 6

3回とも出る目の数が 3以上4以下である確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^3$

1 2 $\boxed{3 \quad 4}$ 5 6

以上のことから

$$P(Z_1=5,\ Z_2=2)=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6^3}\left(4^3-2\times3^3+2^3\right)$$

$$=\frac{18}{6^3}=\underline{\underline{\frac{1}{12}}}\quad\cdots(答)$$

(参考) $Z_1=5$ かつ $Z_2=2$ となるのは、(2, 2, 5)、(2, 3, 5)、(2, 4, 5)、(2, 5, 5)
の場合であるから 全部で $3+3!\times2+3=18$ 通り

よって $P(Z_1=5,\ Z_2=2)=\dfrac{18}{6^3}=\dfrac{1}{12}$

4 #1

$H: x^2-y^2=1$, $C: y=\frac{a}{2}x^2+b$ $(a>0)$

(1) Pは第1象限なので $s>0$, $t>0$、また, PはH, C上の点より

$s^2-t^2=1$ —①, $t=\frac{a}{2}s^2+b$ —②.

PにおけるHの接線の方程式は,

$sx-ty=1$. $t>0$より $y=\frac{s}{t}x-\frac{1}{t}$ —③

Cの式において $y'=ax$ より PにおけるCの接線の傾きはas.

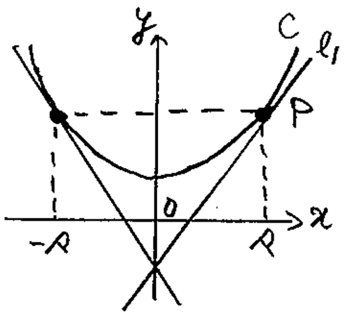
これと③の傾きを比較して $\frac{s}{t}=as$. $a>0$, $s>0$より $t=\frac{1}{a}$ —④

①, ④より $s=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ —⑤. ④, ⑤を②に代入して $b=\frac{1-a^2}{2a}$

よって, Pの座標$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}, \frac{1}{a}\right)$, $b=\frac{1-a^2}{2a}$ …(答)

(2) ④, ⑤を③に代入して, $l_1: y=\sqrt{a^2+1}\,x-a$ …(答)

(3) (1), (2)より $C: y=\frac{a}{2}x^2+\frac{1-a^2}{2a}$, $l_1: y=\sqrt{a^2+1}\,x-a$



y軸に関する対称性より

$$\frac{S}{2}=\int_0^s\left\{\left(\frac{a}{2}x^2+\frac{1-a^2}{2a}\right)-\left(\sqrt{a^2+1}\,x-a\right)\right\}dx$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^s\left(x-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2dx=\frac{a}{2}\int_0^s(x-s)^2dx$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{3}(x-s)^3\right]_0^s=\frac{a}{6}s^3=\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}.$$

よって, $S=\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$ …(答)

(4) $a^2=c$ とおくと $a>0$ より $c>0$ であり $S=\dfrac{(c+1)^{\frac{3}{2}}}{3c}$. これを $f(c)$ とおくと

$$f'(c)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}(c+1)^{\frac{1}{2}}c-(c+1)^{\frac{3}{2}}\times 1}{c^2}=\frac{\sqrt{c+1}}{3c^2}\left(\frac{1}{2}c-1\right)$$. これより,

c	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(c)$		$-$	0	$+$
$f(c)$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より $f(c)$ つまり S は $c=2$ $(a=\sqrt{2})$ のとき最小であり, 最小値は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3^{\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …(答)

5

(1) $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$ より $\vec{v}=(\cos t, 2\cos 2t)$ ···(答)

(2) $|\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\cos^2 t+4(2\cos^2 t-1)^2=16\left(\cos^2 t-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{31}{64}$

$\cos^2 t=\frac{15}{32}\ (<1)$ のとき $|\vec{v}|$ は最小となり. 求める $|\vec{v}|$ の最小値は $\frac{\sqrt{31}}{8}$ ···(答)

(3) $x^2=\sin^2 t$

$y^2=(\sin 2t)^2=(2\sin t\cos t)^2=4\sin^2 t\cos^2 t=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)$

$=4x^2(1-x^2)$

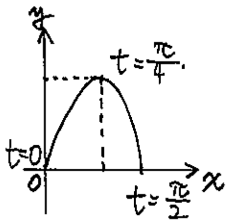
よって 求める曲線Cの方程式は $y^2=4x^2(1-x^2)$ ···(答)

$f(x,y)=4x^2(1-x^2)-y^2$ とおくと $f(x,-y)=f(x,y)$, $f(-x,y)=f(x,y)$

より. 曲線 $C: f(x,y)=0$ は x 軸および y 軸に関して対称、

$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ のとき $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ より. 曲線Cの $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分について調べる.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$
$\vec{v}$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$
(x,y)	$(0,0)$		$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$		$(1,0)$



x 軸および y 軸に関する対称性より

グラフの概形は (い) ···(答)

(4) 求める面積を S とすると. 対称性より第1象限部分の面積 ($=S_1$ とする) を

4倍したものが S である.

$$S_1=\int_0^1 y\,dx \qquad \begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline t & 0\to \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \frac{dx}{dt}=\cos t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos^2 t\,dt$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(-\sin t)\,dt=-2\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

よって $S=4S_1=\underline{\underline{\frac{8}{3}}}$ …(答)

((3)の参考) 曲線Cは $t=\frac{\pi}{2}$ のとき点 $(1,0)$ を通るので該当するのは (い) のみである.

教育 $\boxed{2-2}$ その1

(1) (証明) $f(x) = \log x \ (x > 0)$

導関数の定義より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \log\left\{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log e \quad (\because \text{ ただし書きより})$$

$$= \frac{1}{x}$$

(証明終)

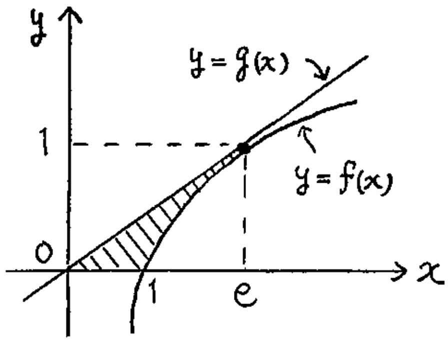
(2) $y = f(x)$ 上の点 $(t, \log t)$ $(t > 0)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t \quad \cdots ①$$

①が原点を通るとき、$\log t = 1$ より $t = e$

このとき ①より $y = \dfrac{x}{e}$　　よって $g(x) = \dfrac{x}{e}$ ・・・(答)

(3) 求める面積を S とすると



$$S = \frac{1}{2}\cdot e\cdot 1 - \int_1^e \log x\, dx$$

$$= \frac{e}{2} - \Big[x\log x - x\Big]_1^e \quad (\because 部分積分法)$$

$$= \underline{\underline{\frac{e}{2} - 1}} \quad \cdots (答)$$

(4) 求める体積を V とする。 $y = \log x$ より $x = e^y$ なので

$$V = \pi\int_0^1 e^{2y}\,dy - \frac{1}{3}\cdot \pi e^2\cdot 1$$

$$= \pi\Big[\frac{1}{2}e^{2y}\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\cdot \pi e^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^2-3}{6}\pi}} \quad \cdots (答)$$