$\boxed{1}$

(1) $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ より

$$\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$$

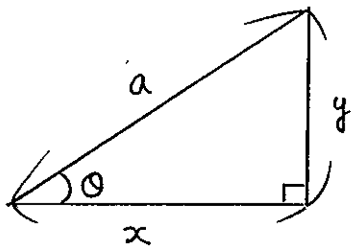
$$=(\alpha-\beta)\cdot(-p)(p^2-2q)$$

$\therefore$ 与式$=(-p)(p^2-2q)=\underline{\underline{-p^3+2pq}}$ … (答)

(2) 斜辺の長さを a (一定), 直角をはさむ2辺の長さを x, y $(x, y>0)$ とおく.

直角三角形の 頂角の1つを θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とすると 直角三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}xy$$
$$=\frac{1}{2}\cdot a\cos\theta\times a\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{1}{4}a^2\sin 2\theta$$



$0<2\theta<\pi$ より $\sin 2\theta=1$ すなわち $2\theta=\frac{\pi}{2}$ i.e $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき

S は最大となる。 このとき 直角三角形は 直角二等辺三角形である。

(3) $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$ のとき、$\sin\theta$ は増加関数だから $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$ では $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta$ は減少関数だから $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$ では $\frac{\sqrt{2}}{2}>\cos 1>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき、$\sin\theta$ は減少関数だから $\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$ では $1>\sin 2>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5}{6}\pi<\theta<\pi$ のとき $\sin\theta$ は減少関数だから $\frac{5}{6}\pi<3<\pi$ では $\frac{1}{2}>\sin 3>0$

以上のことから

$$0<\sin 3<\frac{1}{2}<\cos 1<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 1<\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2<1$$

$\therefore$ $\underline{\underline{\sin 3<\cos 1<\sin 1<\sin 2}}$ … (答)

$\boxed{2}$

(1) $\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} a$, $\log_{\frac{1}{8}} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 \frac{1}{8}}$

$= \frac{b}{2}$, $= -\frac{2}{3}$

これから $f(x) = x^3 + 3\left(\frac{b}{2} - \frac{2}{3}\right)x^2 - 4bx - 4\left(\frac{b}{2}\right)^3$

$\underline{f(x) = x^3 + \left(\frac{3}{2}b - 2\right)x^2 - 4bx - \frac{b^3}{2}}$ …(答)

(2) (1) より $f'(x) = 3x^2 + (3b-4)x - 4b$

$= (3x-4)(x+b)$

$f'(x) = 0$ とおくて $\underline{x = \frac{4}{3}, -b}$ …(答)

(3) $0 < a < 1$ より $b = \log_{\frac{1}{4}} a > 0$ …①

$f(x)$ の増減は次のようになる

x	…	$-b$	…	$\frac{4}{3}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x = -b$ で極大となる

$f(-b) = -b^3 + \frac{3}{2}b^3 - 2b^2 + 4b^2 - \frac{b^3}{2}$

$= 2b^2 = \frac{9}{2}$

これから $b^2 = \frac{9}{4}$

$b = \pm\frac{3}{2}$

① から $b = \log_{\frac{1}{4}} a = \frac{3}{2}$

よって $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

これは $0 < a < 1$ を満たす

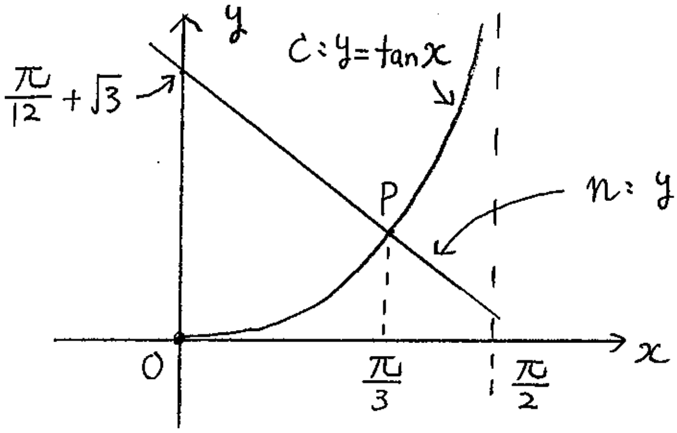
これから $\underline{a = \frac{1}{8}}$ (答)

$C:\ y=\tan x=f(x)$ とおくと、 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(1) $f'(\frac{\pi}{3})=4$ より、法線 n の方程式は

$y=-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}$ つまり $\underline{\underline{y=\frac{-1}{4}x+\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}}}$ …(答)

(2) 曲線 C, 法線 n のグラフは次図。



求める面積を S とすると、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-1}{4}x+\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}-\tan x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{8}x^2+\left(\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}\right)x+\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{72}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log\frac{1}{2}}}\quad\cdots\text{(答)}$$

$\boxed{3-1}$

$a_1=2,\quad (n+1)a_{n+1}=(n+3)a_n+2$ ―①

(1) ①の両辺を $(n+3)(n+2)(n+1)$ で割って

$$\frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+2)}=\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}+\frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

$b_n=\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ のとき

$$b_{n+1}=b_n+\frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}\quad\therefore\ b_{n+1}-b_n=\underline{\underline{\frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}}}\ \cdots(答)$$

(2) $$\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}=\frac{(k+3)-(k+1)}{(k+3)(k+2)(k+1)}=\frac{2}{(k+3)(k+2)(k+1)}$$ より

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$ となるから $\underline{\underline{p=2}}\ \cdots$(答)

(3) (1), (2) の結果より

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(n+2)(n+1)}-\frac{1}{(n+3)(n+2)}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{a_1}{3\cdot 2}+\left\{\left(\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{1}{5\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)n}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}\right)\right\}$$

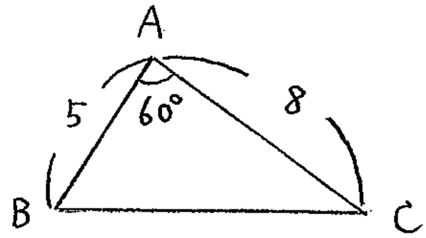
$$=\frac{1}{3}+\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+1)}.$$ ($n=1$ のときも成り立つ)

よって,

$$\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+1)}\qquad\therefore\ a_n=\underline{\underline{\frac{n(n+3)}{2}}}\ \cdots(答)$$

(1) 余弦定理より

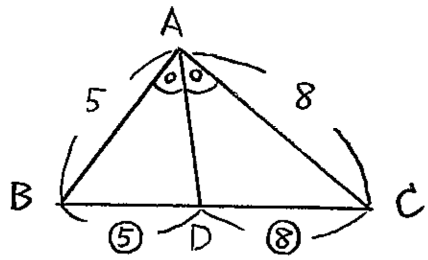


$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 60^\circ$$

$$= 49$$

$BC > 0$ より　$\underline{\underline{BC = 7}}$ …（答）

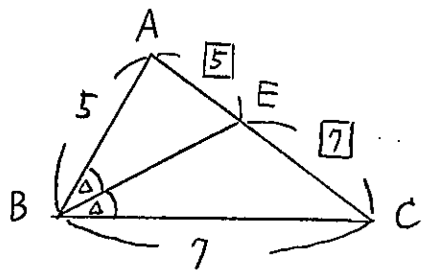
(2) ADは∠BACの二等分線より



$BD : DC = AB : AC = 5 : 8$

よって、$\underline{\underline{\overrightarrow{AD} = \frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AC}}}$ …（答）

同様に



$AE : EC = BA : BC = 5 : 7$

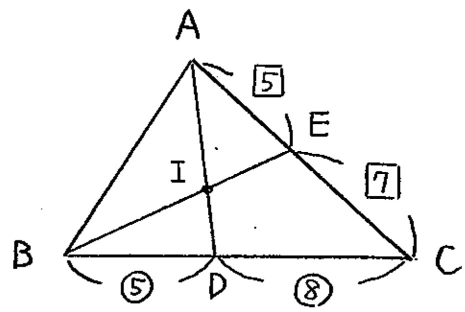
よって、$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

$= \underline{\underline{-\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}}}$ …（答）

(3) Iは線分AD上にあるので

$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AD}$ $(0\leqq k\leqq 1)$ とおけ、

$\overrightarrow{AI}=\frac{8}{13}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}k\overrightarrow{AC}\cdots①$



また、Iは線分BE上にあるので

$\overrightarrow{BI}=l\,\overrightarrow{BE}$ $(0\leqq l\leqq 1)$ とおけ、

$\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=l\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right)$ (∵ (2)より)

$\overrightarrow{AI}=(1-l)\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}l\overrightarrow{AC}\cdots②$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は一次独立なので、①, ② より

$$\begin{cases}\frac{8}{13}k=1-l\\ \frac{5}{13}k=\frac{5}{12}l\end{cases}$$

これを解くと $k=\frac{13}{20}$, $l=\frac{3}{5}$

($0\leqq k\leqq 1$, $0\leqq l\leqq 1$ を満たす。)

①より. $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ ⋯ (答)

((3)の別解) メネラウスの定理より

$\frac{CB}{BD}\times\frac{DI}{IA}\times\frac{AE}{EC}=1$ を用いると $\frac{DI}{IA}=\frac{7}{13}$

よって $\overrightarrow{AI}=\frac{13}{20}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{13}{20}\left(\frac{8}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ としてもよい。

$\boxed{3-3}$

(1) $X=2,3,4,5,6$ より

$$P(X=2)=\frac{1}{{}_6C_2}=\frac{1}{15},\quad P(X=3)=\frac{2}{{}_6C_2}=\frac{2}{15},\quad P(X=4)=\frac{3}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}$$

$$P(X=5)=\frac{4}{{}_6C_2}=\frac{4}{15},\quad P(X=6)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{5}{15}$$

Xの確率分布は

X	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

したがって

$$E(X)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{3}{15}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{5}{15}$$

$$=\frac{70}{15}=\underline{\underline{\frac{14}{3}}}\quad \cdots \text{(答)}$$

(2) $Y=1,2,3,4,5$ だから XとYの同時分布は

X＼Y	1	2	3	4	5	計
2	$\frac{1}{15}$	0	0	0	0	$\frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	0	$\frac{2}{15}$
4	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{3}{15}$
5	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{4}{15}$
6	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$
計	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

たとえば、 $P(X=2)=\frac{1}{15}$, $P(Y=1)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$

同時分布表から $P(X=2,\ Y=1)=\frac{1}{15}$

したがって

$$P(X=2,\ Y=1)\neq P(X=2)\times P(Y=1)$$

ゆえに <u>確率変数 X と Y は独立ではない</u>。

(3)
$$E(XY)=2\times1\times\frac{1}{15}+3\times1\times\frac{1}{15}+3\times2\times\frac{1}{15}+4\times1\times\frac{1}{15}+4\times2\times\frac{1}{15}+4\times3\times\frac{1}{15}$$

$$+5\times1\times\frac{1}{15}+5\times2\times\frac{1}{15}+5\times3\times\frac{1}{15}+5\times4\times\frac{1}{15}+6\times1\times\frac{1}{15}+6\times2\times\frac{1}{15}$$

$$+6\times3\times\frac{1}{15}+6\times4\times\frac{1}{15}+6\times5\times\frac{1}{15}$$

$$=\frac{1}{15}(2+3+6+4+8+12+5+10+15+20+6+12+18+24+30)$$

$$=\frac{175}{15}=\underline{\underline{\frac{35}{3}}}\quad \cdots \text{(答)}$$

4 その1

$$f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2+\int_0^x e^t f(t)\,dt\right) \quad \text{—①} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0 \quad \text{—②}$$

(1) ①より $e^x f(x)=\frac{1}{2}x^2+\int_0^x e^t f(t)\,dt$. 両辺を x で微分して

$e^x f(x)+e^x f'(x)=x+e^x f(x)$ 　∴ $f'(x)=xe^{-x}$ …(答)

これより，$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-\int(-e^{-x})\,dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$ （Cは積分定数） —③

ここで，①より $f(0)=0$ だから，③より $f(0)=-1+C=0$ 　∴ $C=1$

∴ $f(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1=-(x+1)e^{-x}+1$ …(答)

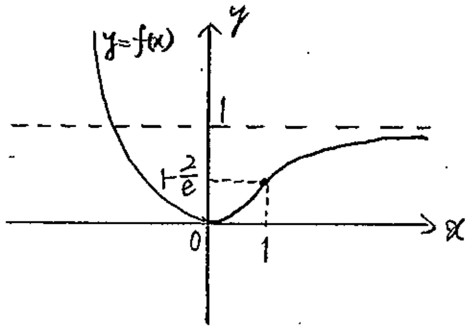
(2) (1)の結果より $f''(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$. よって，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$1-\frac{2}{e}$	↗

極大値なし，極小値 0 ($x=0$ のとき)

変曲点 $\left(1,\ 1-\frac{2}{e}\right)$ …(答)

また，②を用いて $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ であるからグラフの概形は



…(答)

$\boxed{4}$ その2

(3) (2)の結果より

$$S(a)=\int_0^a \{1-f(x)\}dx=\int_0^a (x+1)e^{-x}dx$$

$$=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^a-\int_0^a(-e^{-x})dx$$

$$=-\{(a+1)e^{-a}-1\}+\left[-e^{-x}\right]_0^a$$

$$=-(a+1)e^{-a}+1-(e^{-a}-1)$$

$$=\underline{\underline{-(a+2)e^{-a}+2}} \quad \cdots(答)$$

②より $\lim_{a\to\infty}(a+2)e^{-a}=0$ だから，$\lim_{a\to\infty}S(a)=\underline{\underline{2}}$ $\cdots$(答)

$\boxed{5}$ その1

$|z|^2+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+A=0$ — (★)

(1) (★) $\Leftrightarrow z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+A=0$

$\Leftrightarrow (z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})=\alpha\bar{\alpha}-A$

$\Leftrightarrow (z+\alpha)(\overline{z+\alpha})=|\alpha|^2-A$

$\Leftrightarrow |z-(-\alpha)|^2=|\alpha|^2-A$

ここで $|\alpha|^2-A>0$ より $|z-(-\alpha)|=\sqrt{|\alpha|^2-A}$ となり

これは円を表し 中心 $-\alpha$，半径 $\sqrt{|\alpha|^2-A}$ ---(答)

(2) $z_1 \neq 0$，$z_2 \neq 0$ のとき

$z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2=\bar{z}_1z_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\dfrac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{z_2}{z_1}$ より

$\dfrac{z_2}{z_1}$ は実数であるから 3点 0, z_1, z_2 は同一直線上にある.

(3) (★)で表される円が点 0 を通るとき $A=0$ ---(答)

このとき (★) $\Leftrightarrow z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=0$ は

点 z_1 を通るので $z_1\bar{z}_1+\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_1=0$ — ①

点 z_2 を通るので $z_2\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_2+\alpha\bar{z}_2=0$ — ②

①×z_2 − ②×z_1 より $z_1z_2(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=\alpha(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)$

$\boxed{5}$ その2

3点 0, z_1, z_2 は同一直線上にないので $z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2 \neq 0$ より

$$\alpha=\frac{z_1z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})}{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2} \quad \cdots(答)$$