$\boxed{1}$

(1)　余弦定理より　$\cos B=\dfrac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\dfrac{7}{9}$

$\sin B>0$ であるから　$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

したがって，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin B=5\times\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\underline{\underline{\dfrac{20\sqrt{2}}{9}}}$ ……(答)

(2)　$ab-4a+b=0$ を変形して　$(a+1)(b-4)=-4$

ここで，a，b は正の整数より，

$a+1\geqq2$，$b-4\geqq-3$ となるので

$\begin{cases}a+1=2\\b-4=-2\end{cases}$　または　$\begin{cases}a+1=4\\b-4=-1\end{cases}$

したがって，$(a,b)=\underline{\underline{(1,2),(3,3)}}$ ……(答)

(3)　$2n$ 個の頂点から異なる3個を選んで結べば，必ず異なる三角形が作られるので，

$${}_{2n}\mathrm{C}_3=\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}=\underline{\underline{\frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}}}\ \cdots\cdots(答)$$

また，直角三角形は正 $2n$ 角形に外接する円の直径の両端となる2個の頂点と，残りの $2n-2$ 個の頂点のうちの1点を結べば作ることができる。直径は n 本あるので，全部で $n(2n-2)$ 個の直角三角形ができる。したがって，求める確率は

$$p=\frac{2n(n-1)}{\dfrac{2n(n-1)(2n-1)}{3}}=\underline{\underline{\frac{3}{2n-1}}}\ \cdots\cdots(答)$$

2

(1)
(証明) $\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = r$ とおくと $\log_c b = r\log_c a = \log_c a^r$

$b = a^r$ となるので $\log_a b = \log_a a^r = r$

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(証明終)

(2) $\log_{30} 600 = \dfrac{\log_{10} 600}{\log_{10} 30}$

$= \dfrac{\log_{10}(2\times 3\times 10^2)}{\log_{10}(3\times 10)}$

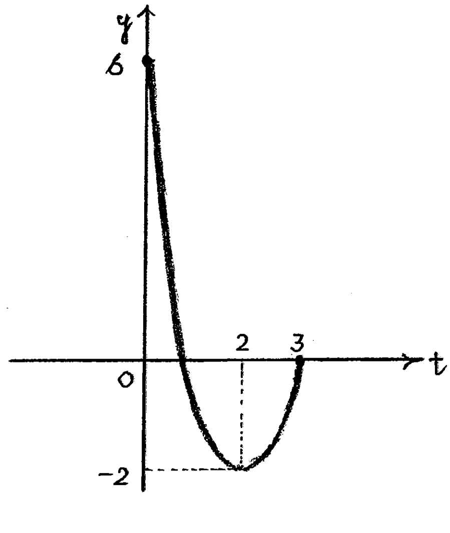
$= \dfrac{\log_{10}2 + \log_{10}3 + 2}{\log_{10}3 + 1} = \dfrac{s+t+2}{t+1}$ … (答)

(3) $\log_5 x = t$ とおくと $1 \leqq x \leqq 125$ より $0 \leqq t \leqq 3$

$y = 2t^2 - 8t + 6$

$= 2(t-2)^2 - 2$

$0 \leqq t \leqq 3$ より



$t = 0$ i.e $x = 1$ のとき 最大

$t = 2$ i.e $x = 25$ のとき 最小

最大値 6 ($x = 1$ のとき)
最小値 -2 ($x = 25$ のとき) (答)

3−1 #1

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+1$ —①

(1) 与えられた漸化式より

$a_3\cdot a_1=a_2^2+1 \Leftrightarrow a_3=2^2+1=5,\quad a_4a_2=a_3^2+1 \Leftrightarrow 2a_4=5^2+1\quad a_4=13.$

$a_5a_3=a_4^2+1 \Leftrightarrow 5a_5=13^2+1\quad a_5=34.$ よって

$a_3=5,\quad a_4=13,\quad a_5=34$ …(答)

(2) $(a_{n+1}+ca_n+a_{n-1})a_{n-1}=a_n(a_n+ca_{n-1}+a_{n-2})$ —②

(証明)

$$
\begin{aligned}
(\text{②の左辺}) &= a_{n+1}a_{n-1}+ca_na_{n-1}+a_{n-1}^2 \\
&= (a_n^2+1)+ca_na_{n-1}+(a_na_{n-2}-1) \quad (\text{①より}) \\
&= a_n^2+ca_na_{n-1}+a_na_{n-2} \\
&= a_n(a_n+ca_{n-1}+a_{n-2}) \\
&= (\text{②の右辺})
\end{aligned}
$$

(証終)

(3) (証明)

②において $c=-3$ とすると

$(a_{n+1}-3a_n+a_{n-1})a_{n-1}=a_n(a_n-3a_{n-1}+a_{n-2})$ —③

すべての自然数 n に対して $a_n>0$ なので、③の両辺を $a_{n-1}a_n$ で割って

$$\frac{a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}}$$ —③'

$b_n=\dfrac{a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}}$ とおくと ③' は $b_{n+1}=b_n\ (n\geqq 3)$

となるから，数列$\{b_n\}$は定数列であり，

$$b_n = b_3 = \frac{a_3 - 3a_2 + a_1}{a_2} = \frac{5-3\times2+1}{2} = 0. \quad \therefore b_n = 0.$$

よって，$n \geqq 3$に対して

$$\frac{a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 0 \quad \text{より} \quad a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

（証終）

3−2

(1) 点Mの定め方より $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+t}\overrightarrow{OC}$

また点Pの定め方より $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$ (kは実数)とおけ、

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+k(1+t)\overrightarrow{OM}$

点Pは三角形ABM上にあるので

$k+k+k(1+t)=1$ より $k=\frac{1}{3+t}$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3+t}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …(答)

(2) 2つの四面体OABEとOABGの体積は等しい。

また(1)より $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3+t}\overrightarrow{OG}$ なので

$V_1:V_2=OG:OP=(3+t):1$ …(答)

(3) 点Qの定め方より $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$

また $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OF}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3+t}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ より

$\overrightarrow{QP}=\left(\frac{1}{3+t}-\frac{1}{3}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3+t}-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\frac{1}{3+t}\vec{c}$

FC // QP のとき $\left(\frac{1}{3+t}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{3+t}=(-1):1$

よって、 $t=3$ …(答)

3−3 #1

大きいサイコロの出る目をA（A=1, 2, 3, 4, 5, 6）
小さいサイコロの出る目をB（B=1, 2, 3, 4, 5, 6）とすると

$$X=10A+B,\quad Y=10B+A$$

(1) $X-Y=(10A+B)-(10B+A)$

$=9A-9B=9(A-B)>0$ より $A>B$

$\therefore (A,B)=(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),$
$(6,3),(6,4),(6,5)$ の15通り

$\therefore P(X-Y>0)=\dfrac{15}{36}=\underline{\underline{\dfrac{5}{12}}}$ …（答）

(2)

A	1	2	3	4	5	6	計
A^2	1	4	9	16	25	36	
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(A)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$E(A^2)=(1+4+9+16+25+36)\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

確率変数Bも同様に　$E(B)=\dfrac{7}{2}$，$E(B^2)=\dfrac{91}{6}$

これらのことから

$$V(A)=E(A^2)-\{E(A)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12},\quad V(B)=\frac{35}{12}$$

ゆえに

$E(X)=E(10A+B)$

$=10E(A)+E(B)=10\times\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}=\underline{\underline{\dfrac{77}{2}}}$ …（答）

$V(X)=V(10A+B)$

$=10^2V(A)+V(B)$　（$\because$ A, Bは互いに独立）

$=10^2\times\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{12}=\underline{\underline{\dfrac{3535}{12}}}$ …（答）

(3) X−Yのとりうる値は

大＼小	1	2	3	4	5	6
1	0	−9	−18	−27	−36	−45
2	9	0	−9	−18	−27	−36
3	18	9	0	−9	−18	−27
4	27	18	9	0	−9	−18
5	36	27	18	9	0	−9
6	45	36	27	18	9	0

$\boxed{3-3}$ #2

$Z=\frac{1}{9}(X-Y)$ とおくと

$$E(Z)=\frac{1}{9}\{E(X)-E(Y)\}=0$$

$$V(Z)=V\left(\frac{1}{9}(X-Y)\right)$$

$$=\frac{1}{36}\left\{(1-0)^2\times 10+(2-0)^2\times 8+(3-0)^2\times 6+(4-0)^2\times 4+(5-0)^2\times 2\right\}$$

$$=\frac{1}{36}(10+32+54+64+50)=\frac{210}{36}$$

$$\therefore\ \sigma(X-Y)=\sigma(9Z)$$

$$=9\sigma(Z)=9\sqrt{V(Z)}=9\times\frac{\sqrt{210}}{6}=\underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{210}}}\ \cdots(答)$$

$\boxed{4}$

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}$ ---(答)

(2)(証明) $0\leqq x\leqq a$のとき $1\leqq 1+x^2$より $1\leqq\sqrt{1+x^2}\leqq 1+x^2$

$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$(等号は$x=0$のときのみ成立)

よって$a>0$のとき $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ が成立する(証終)

(3)(証明) (2)の結果より $a=1$のとき

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ―①

(1)より $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\Big[\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big]_0^1=\log(1+\sqrt{2})$ ―②

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ ($x=\tan\theta$とおいた)

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$ ―③

①,②,③より $\dfrac{\pi}{4}<\log(1+\sqrt{2})$ が成立する(証終)

5 #1

(1)(証明) $\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)$　　$\frac{dy}{dt}=9\sin^2 t\cdot\cos t$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ より　$0<\cos t<1$.　$0<\sin t<1$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{9\sin^2 t\cdot\cos t}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-3\tan t$$

これから点P$(\cos^3 t, 3\sin^3 t)$における接線 ℓ の方程式は.

$$y=-3(\tan t)(x-\cos^3 t)+3\sin^3 t$$

$$=-3(\tan t)x+3\frac{\sin t}{\cos t}\times\cos^3 t+3\sin^3 t$$

$$=-3(\tan t)x+3\sin t(\cos^2 t+\sin^2 t)$$

$$=-3(\tan t)x+3\sin t$$ となり, 示された.　(証終)

(2)(証明) 原点から ℓ: $3(\tan t)x+y+3\sin t=0$ までの距離が

半径 r と等しいから. $r=\frac{|3\sin t|}{\sqrt{9\tan^2 t+1}}$　よって　$r^2=\frac{9\sin^2 t}{9\tan^2 t+1}$

ここで $\sin^2 t=1-\cos^2 t=1-\alpha$,

$1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$ から $\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}-1=\frac{1}{\alpha}-1$

これから　$r^2=\frac{9(1-\alpha)}{9(\frac{1}{\alpha}-1)+1}=\frac{9(1-\alpha)}{\frac{9}{\alpha}-8}$

$$=\frac{9\alpha(\alpha-1)}{8\alpha-9}$$ となり示された. (証終)

$\boxed{5}$ #2

(3)

$$f(\alpha)=\frac{9\alpha(\alpha-1)}{8\alpha-9}\quad(0<\alpha<1)$$ とおくと

$$f'(\alpha)=\frac{9\{(2\alpha-1)(8\alpha-9)-\alpha(\alpha-1)\times 8\}}{(8\alpha-9)^2}$$

$$=\frac{9(8\alpha^2-18\alpha+9)}{(8\alpha-9)^2}=\frac{9(4\alpha-3)(2\alpha-3)}{(8\alpha-9)^2}$$

$f'(\alpha)=0$ とおくと $0<\alpha<1$ より $\alpha=\frac{3}{4}$

$f(\alpha)$ の増減は次の通り

α	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	(1)
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		↗	極大	↘	

$\alpha=\frac{3}{4}$ のとき、$f(\alpha)$ は極大かつ最大

$$r^2=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9\times\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{6-9}=\frac{9}{16}$$

$\alpha=\cos^2\theta=\frac{3}{4}$ で $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ だから

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき

$r^2=f(\alpha)$ で、$r>0$ より、$f(\alpha)$ が最大のとき、r も最大となる。

すなわち 最大値 $\frac{3}{4}$ で、このとき $\theta=\frac{\pi}{6}$ …(答)

教育 $\boxed{2-2}$

(1) $y=\sqrt{x}\ (x>0)$ のとき $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Cの接点を $(t,\sqrt{t})\ (t>0)$ とすると、直線 ℓ の方程式は

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)+\sqrt{t}$ すなわち $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}x+\dfrac{\sqrt{t}}{2}$ …①

①が点 $(0,1)$ を通るとき、$1=\dfrac{\sqrt{t}}{2}$ より $t=4$

よって ℓ の方程式は $\underline{\underline{y=\dfrac{1}{4}x+1}}$ …(答)

(2) Cと法線 n の交点を $(a,\sqrt{a})\ (a>0)$ とすると

法線 n の傾きは $-2\sqrt{a}$ なので $-2\sqrt{a}=-2$ より $a=1$

よって、n の方程式は $y=-2(x-1)+1$ すなわち $\underline{\underline{y=-2x+3}}$ …(答)

(3) 求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{4}-1\right)\times\left(1-\frac{8}{9}\right)$$

$$+\int_1^4\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{72}+\left[\frac{x^2}{8}+x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{9}}}\ \cdots(\text{答})$$