1

(1) $2^2+4^2=(2\sqrt{5})^2$であるから直角三角形で面積は $\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$

内接円の半径をrとおくと $\frac{r}{2}(2+4+2\sqrt{5})=4$ $(3+\sqrt{5})r=4$

$r=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5}=3-\sqrt{5}$

よって内接する円の面積は $\pi(3-\sqrt{5})^2=\underline{\underline{2(7-3\sqrt{5})\pi}}$ …(答)

(2) $\theta=\sqrt{5}+\sqrt{7}$より $\theta-\sqrt{5}=\sqrt{7}$ 両辺を平方して $\theta^2-2\sqrt{5}\theta+5=7$

$\theta^2-2=2\sqrt{5}\theta$ 両辺を平方して $\theta^4-4\theta^2+4=20\theta^2$ $\theta^4-24\theta^2+4=0$

これから、求める整式のうちの1つは $f(x)=\underline{\underline{x^4-24x^2+4}}$ …(答)

(3) 起こりうるすべての場合の数は 6^3

出る目の和が6以下であるのは

$(1,1,1)$ 1通り　$(1,1,2)$ $\frac{3!}{2!}=3$通り

$(1,1,3)$ $\frac{3!}{2!}=3$通り　$(1,1,4)$ $\frac{3!}{2!}=3$通り

$(1,2,2)$ $\frac{3!}{2!}=3$通り　$(1,2,3)$ $3!=6$通り

$(2,2,2)$ 1通り

$1+3+3+3+3+6+1=20$

これから7以上であるのは

$1-\frac{20}{6^3}=1-\frac{5}{54}=\underline{\underline{\frac{49}{54}}}$ …(答)

(1) $P(x, y)$とおくと 条件より $AP:BP=3:2$

このとき $2AP=3BP$ より $4AP^2=9BP^2$

$4(x^2+y^2)=9\{x^2+(y-5k)^2\}$ を展開して整理すると

$x^2+y^2-18ky+45k^2=0$ すなわち $x^2+(y-9k)^2=36k^2$

よって点Pの軌跡は、中心$(0, 9k)$, 半径$6k(>0)$の円 …(答)

(別解) アポロニウスの円を利用してもよい。

(2) (1)の軌跡をDとすると

$D: x^2+y^2-18ky+45k^2=0$ …①

Cの方程式を変形して $x^2=3y-\frac{9}{4}$ を①に代入して

整理すると $y^2-3(6k-1)y+45k^2-\frac{9}{4}=0$ …②

$f(y)=$(②の左辺)とおくと $f(y)=\left\{y-\frac{3}{2}(6k-1)\right\}^2-\frac{9}{2}(8k^2-6k+1)$

Cの頂点$\left(0, \frac{3}{4}\right)$およびCとDはそれぞれy軸に関して

対称であることに注意すると、CとDの共有点の個数

がちょうど2になる条件は、②の実数解のうち、$y>\frac{3}{4}$

をみたすものが、ただ1つ存在することであり、次の

2パターン考えられる。

(I) ②が $\frac{3}{4}$ より大きい解と小さい解を1つずつもつとき

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}(80k^2 - 24k + 1)$$

$$= \frac{9}{16}(20k - 1)(4k - 1) < 0$$

となればよく、これを解くと $\frac{1}{20} < k < \frac{1}{4}$

(II) ②が $\frac{3}{4}$ より大きい重解をもつとき

$$\begin{cases} \text{軸}: \frac{3}{2}(6k - 1) > \frac{3}{4} \\ \text{頂点}: \frac{-9}{2}(8k^2 - 6k + 1) = 0 \end{cases}$$

となればよく、整理すると

$$\begin{cases} k > \frac{1}{4} \\ (2k - 1)(4k - 1) = 0 \end{cases}$$ を解いて $k = \frac{1}{2}$

(I), (II) より、求める範囲は

$\frac{1}{20} < k < \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{2}$ …(答)

3－1 1枚目

(1) 数学的帰納法で証明する

証明)

i) $n=3$ のとき $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}$

$$=2+\sqrt{5}=a_3+b_3\sqrt{5}$$

a_3, b_3 は有理数で $\sqrt{5}$ は無理数だから

$a_3=2,\ b_3=1$ となり成り立つ

ii) $n=3k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定すると

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}=a_{3k}+b_{3k}\sqrt{5} \quad (a_{3k}, b_{3k} \text{ は整数})$$

$n=3k+3$ のとき

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k+3}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$=(a_{3k}+b_{3k}\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$$

$$=2a_{3k}+5b_{3k}+(a_{3k}+2b_{3k})\sqrt{5}$$

a_{3k}, b_{3k} は整数だから, $2a_{3k}+5b_{3k}$, $a_{3k}+2b_{3k}$ も整数

よって $n=3k+3$ のときも成り立つ

i) ii) より すべての3の倍数 n について a_n, b_n は整数である. (証終)

(2) 数学的帰納法で証明する

i) $n=3$ のとき $a_3=2$, $b_3=1$ より成り立つ

ii) $n=3k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する

$a_{3k}+b_{3k}$ は奇数である

①より

$$a_{3k+3}+b_{3k+3}=2a_{3k}+5b_{3k}+a_{3k}+2b_{3k}$$

$$=2(a_{3k}+3b_{3k})+a_{3k}+b_{3k}$$ だから

これから $a_{3k+3}+b_{3k+3}$ は奇数となり，$n=3k+3$ のときも成り立つ

i) ii)より 自然数 n が3の倍数であるとき，a_n, b_n のどちらか一方が偶数で

他方は奇数である　　（証終）

(3)（証明）①より n が3の倍数のとき a_n, b_n は整数である．

k を負でない整数として

i) $n=3k+1$ のとき

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=(a_{3k}+b_{3k}\sqrt{5})\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{a_{3k}+5b_{3k}}{2}+\frac{a_{3k}+b_{3k}}{2}\sqrt{5}$$

②より $a_{3k}+b_{3k}$ は奇数だから $\dfrac{a_{3k}+b_{3k}}{2}$ は整数ではない

ii) $n=3k+2$ のとき

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k+2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

$$=(a_{3k}+b_{3k}\sqrt{5})\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{3a_{3k}+5b_{3k}}{2}+\frac{a_{3k}+3b_{3k}}{2}\sqrt{5}$$

②より $a_{3k}+b_{3k}$ は奇数だから $\dfrac{a_{3k}+3b_{3k}}{2}=\dfrac{a_{3k}+b_{3k}}{2}+b_{3k}$ は整数ではない

以上から a_n, b_n がともに整数となるのは n が3の倍数のときに限る　（証終）

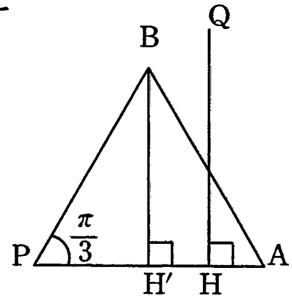
3−2

(1) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\dfrac{\pi}{3}\ \underline{\underline{=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots(答)}}$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|\cos\dfrac{2\pi}{3}\ \underline{\underline{=-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots(答)}}$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\dfrac{2\pi}{3}\ \underline{\underline{=-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots(答)}}$

(2) 点 B から直線 PA に下した垂線の足を H′ とすると

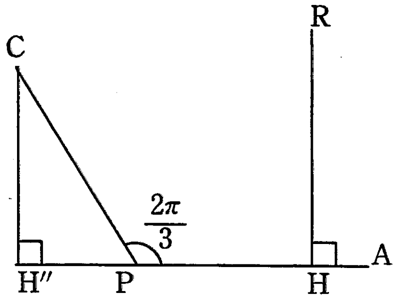


$\overrightarrow{PH'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{HQ}/\!/\overrightarrow{H'B}$, $|\overrightarrow{HQ}|=1$,

$|\overrightarrow{H'B}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\overrightarrow{HQ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{H'B}$ であるから

$\overrightarrow{HQ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\overrightarrow{PB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)\ \underline{\underline{=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{PB}\cdots\cdots(答)}}$

また，点 C から直線 PA に下した垂線の足を H″ とすると



$\overrightarrow{PH''}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{HR}/\!/\overrightarrow{H''C}$,

$|\overrightarrow{H''C}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{HR}|=1$ より

$\overrightarrow{HR}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{H''C}$ であるから

$\overrightarrow{HR}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\overrightarrow{PC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)\ \underline{\underline{=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{PA}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{PC}\cdots\cdots(答)}}$

(3) $\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HR}=\dfrac{4}{3}\left(\overrightarrow{PB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}\right)$

$=\dfrac{4}{3}\left(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{PA}|^2\right)$

$=\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{3}$ であるから

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HR}}{|\overrightarrow{HQ}||\overrightarrow{HR}|}\ \underline{\underline{=-\dfrac{1}{3}\cdots\cdots(答)}}$

(1) $X=4$ となるのは i) 1回目赤玉，2回目白玉を取り出す

ii) 1回目白玉，2回目赤玉を取り出す　場合であるので

$$P(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}=\underline{\underline{\frac{11}{18}}}$$

(2) 1回目赤玉，2回目赤玉を取り出すとき $X=2$ で $P(X=2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

1回目白玉，2回目白玉を取り出すとき $X=6$ で $P(X=6)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

X の確率分布は

X	2	4	6	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

これから $E(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{11}{18}+6\times\frac{1}{18}=\underline{\underline{\frac{31}{9}}}$

X^2 の確率分布は

X^2	4	16	36	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

これから $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=4\times\frac{1}{3}+16\times\frac{11}{18}+36\times\frac{1}{18}-\left(\frac{31}{9}\right)^2=\underline{\underline{\frac{101}{81}}}$$

(3) (2)より2回終了時 i) (赤玉，白玉)$=(2,4)$のとき

3回目赤玉を取り出したとき $\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$ $(Y=5)$

3回目白玉を取り出したとき $\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$ $(Y=3)$

ii) (赤玉，白玉)$=(4,2)$のとき

3回目赤玉を取り出したとき $\frac{11}{18}\times\frac{4}{6}=\frac{11}{27}$ $(Y=3)$

3回目白玉を取り出したとき $\frac{11}{18}\times\frac{2}{6}=\frac{11}{54}$ $(Y=1)$

(iii) (赤玉, 白玉) = (6, 0) のとき

3回目赤玉を取り出したとき $\frac{1}{18}\times 1=\frac{1}{18}$ $(Y=1)$

これから $P(Y=1)=\frac{11}{54}+\frac{1}{18}=\frac{7}{27}$, $P(Y=3)=\frac{2}{9}+\frac{11}{27}=\frac{17}{27}$

$P(Y=5)=\frac{1}{9}$

Yの確率分布は

Y	1	3	5	計
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{1}{9}$	1

これから $E(Y)=1\times\frac{7}{27}+3\times\frac{17}{27}+5\times\frac{1}{9}$

$=\underline{\frac{73}{27}}$

$\boxed{4}$

$C: y=(\log x)^2\ (x>0)$

(1) Cの式より $y'=\frac{2\log x}{x}$、よって $P(a, (\log a)^2)$ における曲線Cの接線Lの方程式は $y=\frac{2\log a}{a}(x-a)+(\log a)^2=\underline{\underline{\frac{2\log a}{a}x-2\log a+(\log a)^2}}$

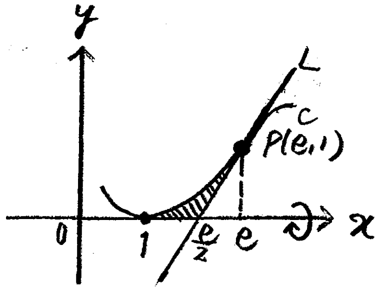
(2) Lの式において $y=0$ として x を解くと $x=-\frac{a\log a}{2}+a\ (a>1)$.

$f(a)=-\frac{a\log a}{2}+a\ (a>1)$ とおくと $f'(a)=\frac{1}{2}(1-\log a)$、これより

a	(1)	$\cdots$	e	
$f'(a)$		+	0	−
$f(a)$		↗		↘

増減表より $f(a)$ が最大となるのは $a=e$ のとき ∴ $\underline{\underline{a_0=e}}$

(3) $a=e$ のとき Lの式は $y=\frac{2}{e}x-1$



求める体積をVとすると、Vは右図の斜線部分をx軸のまわりに回転させた立体の体積である。よって

$V=\int_1^e \pi(\log x)^4dx-\pi\times 1^2\times\left(e-\frac{e}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}=\pi\int_1^e(\log x)^4dx-\frac{\pi e}{6}$ —①

ここで $I_n=\int_1^e(\log x)^n dx\ (n=1,2,3,\dots)$ とすると、$I_1=[x\log x-x]_1^e=1$ —②

$I_{n+1}=\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=\left[x(\log x)^{n+1}\right]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n dx=e-(n+1)I_n$

よって、$I_4=e-4I_3=e-4(e-3I_2)=-3e+12I_2=-3e+12(e-2I_1)$

$=9e-24I_1=9e-24$ (②より)

従って①より $V=\pi(9e-24)-\frac{\pi e}{6}=\underline{\underline{\left(\frac{53}{6}e-24\right)\pi}}$

$\boxed{5}$

(1)(証明) $\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} = \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ が成り立つと仮定すると

$(1+iz_1)(z_2+i) = (1+iz_2)(z_1+i) \iff 2z_1 = 2z_2 \quad \therefore z_1 = z_2$

となり，z_1 と z_2 が異なることに反する。よって $\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$

(証終)

(2)(証明) $\dfrac{1+iz}{z+i} = w \ (z \neq -i)$ より

$1+iz = w(z+i) \iff (w-i)z = 1-iw \quad w \neq i$ より $z = \dfrac{1-iw}{w-i}$

よって，題意を満たす複素数 z は存在する (証終)

(3) $w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ を $\left|w - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ に代入して

$\left|\dfrac{1+iz}{z+i} - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \iff \left|\dfrac{iz+3}{z+i}\right| = 1 \iff |i||z-3i| = |z+i|$

$\therefore |z-3i| = |z+i|$.

よって，点 z は2点 $-i$, $3i$ を結ぶ垂直二等分線上の点より $\underline{\underline{b=1}}$

(1) $y>-1$ のとき $y=2^x-1$ を変形して

$2^x=y+1\ (>0)$ の両辺に底2の対数をとると

$$x=\log_2(y+1)$$

x と y を入れかえると $y=\log_2(x+1)\ (x>-1)$

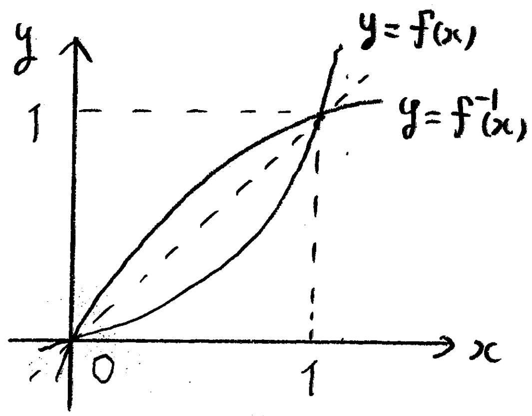
よって $f^{-1}(x)=\log_2(x+1)$，定義域は $x>-1$ …(答)

(2) $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の

グラフは右図のように

共有点が2個存在し，

2点 $(0,0)$，$(1,1)$ は



ともに2つの曲線上にあるから，これが共有点の

すべてである。よって共有点は $(0,0)$，$(1,1)$ …(答)

(3) $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して

対称であるから，求める面積は

$$2\int_0^1 \{x-(2^x-1)\}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2^x}{\log 2}+x\right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{3-\frac{2}{\log 2}}} \quad \cdots\text{（答）}$$