$\boxed{1}$

(1) さいころの目の3つが a で，1つが b $(a \neq b)$ となるのは，${}_6P_2 = 30$（通り）ある。

したがって，求める確率 P は

$P = 30 \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{5}{54}$ …（答）

(2) $0 \leqq |x^2+6x-1| \leqq 7-x$ より $x \leqq 7$ …① で

$x-7 \leqq x^2+6x-1 \leqq 7-x$ となる。

(i) $x-7 \leqq x^2+6x-1$ より $x^2+5x+6 \geqq 0$

$(x+2)(x+3) \geqq 0$ $\therefore$ $x \leqq -3, -2 \leqq x$ …②

(ii) $x^2+6x-1 \leqq 7-x$ より $x^2+7x-8 \leqq 0$

$(x+8)(x-1) \leqq 0$ $\therefore$ $-8 \leqq x \leqq 1$ …③

①②③の共通部分より $-8 \leqq x \leqq -3, -2 \leqq x \leqq 1$ …（答）

(3) $\frac{1}{2} = \log_{11}\sqrt{11}$ で $y = \log_{11} x$ は増加関数であるから

$3.1 < \pi < 3.2$ より $\sqrt{9.61} < \pi < \sqrt{10.24} < \sqrt{11}$ を利用して

$\log_{11}\pi < \log_{11}\sqrt{11} = \frac{1}{2}$ …① となる。

また，$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ で $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数であるから $\frac{3}{4} < 1$ より $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ …② となる。

①②より $\log_{11}\pi < \frac{1}{2} < \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ …（答）

$\boxed{2}$

(1) $x=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$より $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}<2\pi-\frac{\pi}{4}$ なので $-1\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって $\underline{\underline{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}}$ …(答)

(2) $x^2=1-2\sin\theta\cos\theta$より $\sin\theta\cos\theta=\frac{1-x^2}{2}$ ―①

$y=4(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$

$=4x\left(1+\frac{1-x^2}{2}\right)+3\sqrt{2}\,\frac{1-x^2}{2}$ (①より)

$=\underline{\underline{-2x^3-\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2+6x+\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$ …(答)

(3) $y'=-6x^2-3\sqrt{2}x+6$

$=-3(2x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ より yの増減は次のようになる

x	$-\sqrt{2}$	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

$x=-\sqrt{2}$のとき　$y=-\frac{7\sqrt{2}}{2}$　$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$より $\theta=\frac{7}{4}\pi$

$x=\sqrt{2}$のとき　$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$のとき　$y=\frac{13}{4}\sqrt{2}$　$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$より $\theta=\frac{5}{12}\pi,\frac{13}{12}\pi$

以上より

$\underline{\underline{最大値\ \frac{13}{4}\sqrt{2}\ \left(\theta=\frac{5}{12}\pi,\frac{13}{12}\piのとき\right)}}$

$\underline{\underline{最小値\ -\frac{7}{2}\sqrt{2}\ \left(\theta=\frac{7}{4}\piのとき\right)}}$ …(答)

3−1

(1) (証) $f(x)=x^2-2(c+1)x+c^2-2c+9$ とおく.

$f(c)=c^2-2(c+1)c+c^2-2c+9=-4c+9<0$ ($c\geqq 3$).

∴ $f(c)<0$ であり, $y=f(x)$ のグラフが下に凸の放物線であることから,

$f(x)=0$ は c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつ (証終).

(2) (証) $x^2-2(a_n+1)x+a_n^2-2a_n+9=0$ —②

与えられた条件と②より $n\geqq 2$ のとき $x^2-2(a_{n-1}+1)x+a_{n-1}^2-2a_{n-1}+9=0$

の解のうち大きい方が a_n なので. $a_n^2-2(a_{n-1}+1)a_n+a_{n-1}^2-2a_{n-1}+9=0$.

これを変形して $a_{n-1}^2-2(a_n+1)a_{n-1}+a_n^2-2a_n+9=0$ とすれば, これは a_{n-1} が

②の解であることを示し, ②の解のもう一方は a_{n+1} であり, $a_{n-1}<a_{n+1}$

なので②の解のうち小さい方が a_{n-1} である (証終).

(3) (証) $n\geqq 2$ のとき ②の解は a_{n+1}, a_{n-1} なので解と係数の関係より

$a_{n+1}+a_{n-1}=2(a_n+1)$. よって $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$ —(*) (証終).

(4) (*)より $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+2$. $b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると

$b_n=b_{n-1}+2$ —(**). ここで $x^2-2(a_1+1)x+a_1^2-2a_1+9=0$ を解くと

$a_1=3$ より $x^2-8x+12=0$ $(x-2)(x-6)=0$. $x=2, 6$ $a_1<a_2$ より $a_2=6$.

よって, (**)より $b_n=b_1+(n-1)\times 2=(a_2-a_1)+(n-1)\times 2$

$=(6-3)+(n-1)\times 2$

$=2n+1$.

さらに, $a_{n+1}-a_n=2n+1$ より $n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=3+\frac{n-1}{2}\{3+(2n-1)\}=n^2+2$ ($n=1$ のときも成立つ).

以上より $b_n=2n+1$, $a_n=n^2+2$ ($n=1,2,3,\ldots$). ・・・(答)

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,-2,1)$, $\overrightarrow{CD}=(1,1,-2)$

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times1+(-2)\times1+1\times(-2)=-3$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CD}|}=\frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$$

よって 求めるなす角は $\underline{\underline{120^\circ}}$ …(答)

(2) l, m 上の任意の点をそれぞれ P, Q とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CD}$ (s,tは実数)とおけ

$\overrightarrow{OP}=(2,0,4)+s(1,-2,1)=(2+s,\ -2s,\ 4+s)$

$\overrightarrow{OQ}=(3,2,2)+t(1,1,-2)=(3+t,\ 2+t,\ 2-2t)$

l, m が交わると仮定すると

$$\begin{cases}2+s=3+t & \cdots①\\ -2s=2+t & \cdots②\\ 4+s=2-2t & \cdots③\end{cases}$$

を同時にみたす実数 s,t が存在する。

①, ② を解くと、$s=\frac{-1}{3}$, $t=\frac{-4}{3}$ であるが、

これは ③をみたさない。よって ①,②,③ を同時に

みたす実数 s, t が存在しないので

ℓ, m は交わらない。…(答)

(3) (2) で定めた P, Q を用いて.

$\overrightarrow{PQ} \perp \ell$ かつ $\overrightarrow{PQ} \perp m$ のときを考える。

$\overrightarrow{PQ} = (1-s+t, 2+2s+t, -2-s-2t)$

$\overrightarrow{PQ} \perp \ell$ のとき $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ を計算して $6s+3t=-5$ …④

$\overrightarrow{PQ} \perp m$ のとき $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{CD}$ より

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ を計算して $3s+6t=-7$ …⑤

④, ⑤ より $s = \frac{-1}{3}$, $t = -1$

このとき $P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $Q(2, 1, 4)$

よって n と ℓ の交点は $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

n と m の交点は $(2, 1, 4)$ …(答)

$\boxed{3-3}$

(1) $m=2$ より $-1, 0, 1, 1$ の4枚のカードから取り出す。

$X \geqq 0$ となるのは，$0, 1, 1$ の3枚のうち2枚取り出す場合であるから，$P(X \geqq 0) = \dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$ …(答)

(2) $m=9$ より $-1, 0, 1$ (9枚) の11枚のカードから取り出す。

$Y=1$ となる事象の余事象 $Y=0$ は $-1, 0$ の2枚を取り出す場合であるから，$P(Y=1) = 1 - \dfrac{1}{{}_{11}C_2} = \underline{\underline{\dfrac{54}{55}}}$ …(答)

(3) (i) $XY=-1$ となるのは，-1 と 1 を取り出す場合であるから

$$P(XY=-1) = \frac{1 \times {}_mC_1}{{}_{m+2}C_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)}$$

(ii) $XY=0$ となるのは，0 を取り出す場合であるから

$$P(XY=0) = \frac{1 \times {}_{m+1}C_1}{{}_{m+2}C_2} = \frac{2}{m+2}$$

(iii) $XY=1$ となるのは，1 を2枚取り出す場合であるから

$m \geqq 2$ のとき $P(XY=1) = \dfrac{{}_mC_2}{{}_{m+2}C_2} = \dfrac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$ （$m=1$ のときも成り立つ。）

(i)～(iii) より XY の確率分布は次のようになる。

XY	-1	0	1	計
P	$\dfrac{2m}{(m+2)(m+1)}$	$\dfrac{2}{m+2}$	$\dfrac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$	1

したがって $E(XY) = \dfrac{-2m}{(m+2)(m+1)} + \dfrac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$

$$= \frac{m(m-3)}{(m+2)(m+1)} > 0 \text{ より}$$

m が自然数であるから，$m > 3$

これをみたす最小の自然数は $\underline{\underline{m=4}}$ …(答)

$\boxed{4}$ #1

(1) ℓの方程式は $y=mx\ (m>0)$ とおけて.

これとCの式より. $4m^2x^2-4x+3=0$ …①

Cとℓは接するので ①の判別式をDとすると

$\frac{D}{4}=4-4m^2\cdot 3=0$

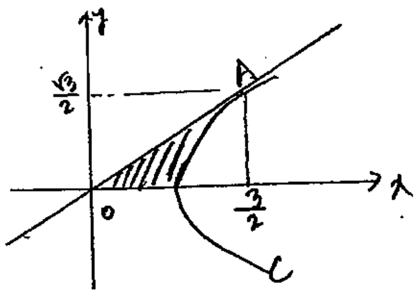
$m^2=\frac{1}{3}$ $m>0$より $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$

このとき，①を解くと $x=\frac{3}{2}$

以上より $\underline{\ell: y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ A\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ …(答)

(2) 解答は次ページ。

(3)



求める図形の面積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x\,dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(y^2+\frac{3}{4}\right)dy-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

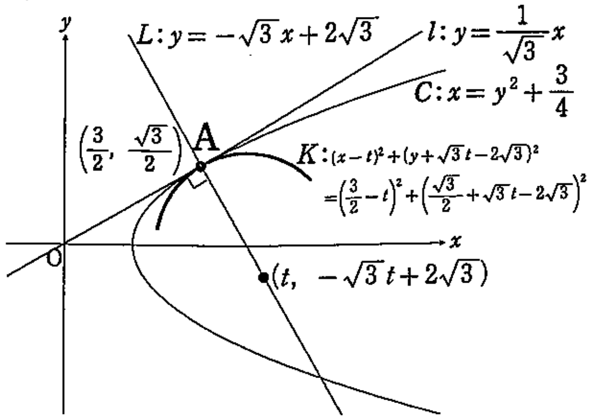
$$=\left[\frac{y^3}{3}+\frac{3}{4}y\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{8}}}\ \cdots(答)$$

4 #2

(2) 解答



(1)より，接点AにおけるCの法線Lの方程式は

$$L: y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore L: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$$

したがって，求める円Kの中心の座標を

$$(t, -\sqrt{3}t+2\sqrt{3})$$

とおくと，半径rは

$$r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}t-2\sqrt{3}\right)^2}$$

よって，円Kの方程式は

$$K: (x-t)^2+(y+\sqrt{3}t-2\sqrt{3})^2=\left(\frac{3}{2}-t\right)^2+\left(\sqrt{3}t-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdots (*)$$

したがって，CとKの共有点が2個より

$C: x=y^2+\frac{3}{4}$を$(*)$に代入した方程式の実数解の個数が2個になるための条件を求めればよい。

$$\left(y^2+\frac{3}{4}-t\right)^2+(y+\sqrt{3}t-2\sqrt{3})^2=\left(\frac{3}{2}-t\right)^2+\left(\sqrt{3}t-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$y^4+\left(\frac{3}{2}-2t\right)y^2+\frac{9}{16}-\frac{3}{2}t+t^2+y^2+(2\sqrt{3}t-4\sqrt{3})y+3t^2-12t+12=\frac{9}{4}-3t+t^2+3t^2-9t+\frac{27}{4}$$

$$y^4+\left(\frac{5}{2}-2t\right)y^2+(2\sqrt{3}t-4\sqrt{3})y-\frac{3}{2}t+\frac{57}{16}=0$$

$$16y^4+(40-32t)y^2+(32\sqrt{3}t-64\sqrt{3})y-24t+57=0$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$	16	0	$40-32t$	$32\sqrt{3}t-64\sqrt{3}$	$-24t+57$
+		$8\sqrt{3}$	12	$26\sqrt{3}-16\sqrt{3}t$	$24t-57$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	16	$8\sqrt{3}$	$52-32t$	$16\sqrt{3}t-38\sqrt{3}$	0
+		$8\sqrt{3}$	24	$38\sqrt{3}-16\sqrt{3}t$	
	16	$16\sqrt{3}$	$76-32t$	0	

$$\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(16y^2+16\sqrt{3}y+76-32t)=0$$

$$(2y-\sqrt{3})^2(4y^2+4\sqrt{3}y+19-8t)=0 \cdots (**)$$

(右上へ続く)

(ⅰ) $4y^2+4\sqrt{3}y+19-8t=0$が2重解をもつとき

判別式 $\frac{D}{4}=(2\sqrt{3})^2-4(19-8t)=0$

$$12-76+32t=0$$

$$\therefore t=2$$

このとき，$(**)$は

$$(2y-\sqrt{3})^2(4y^2+4\sqrt{3}y+3)=0$$

$$(2y-\sqrt{3})^2(2y+\sqrt{3})^2=0$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{(2重解)},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\text{(2重解)}$$

よって，$t=2$は適する。

したがって，$(*)$より，$K: (x-2)^2+y^2=1$

(ⅱ) $4y^2+4\sqrt{3}y+19-8t=0$が$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$を解にもつとき $3+6+19-8t=0$

$$\therefore t=\frac{7}{2}$$

このとき，$(**)$は

$$(2y-\sqrt{3})^2(4y^2+4\sqrt{3}y-9)=0$$

$$(2y-\sqrt{3})^3(2y+3\sqrt{3})=0$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{(3重解)},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

よって，$t=\frac{7}{2}$は適する。

したがって，$(*)$より，

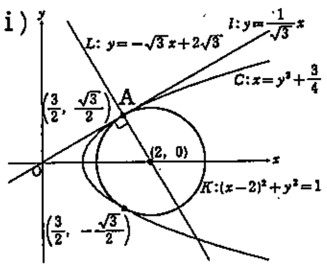
$$K: \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16$$

(ⅰ)(ⅱ)より

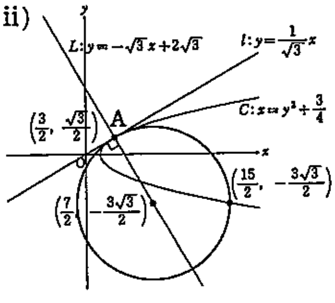
$$(x-2)^2+y^2=1,\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16 \cdots \text{答}$$

(参考図)

(ⅰ)



(ⅱ)



(2)の解答に関しましては

独立行政法人 国立高等専門学校機構

鹿児島工業高等専門学校准教授

椨松祐介先生からご提供いただきました。

5

(1) (証) $g(x)=0$ の解を α, $h(x)=0$ の解を β とすると,

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2-\beta+1=0$ が成り立つ. このとき,

$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\beta^3+1=(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

となるので題意は示された　(証終)

(2) (証) $r(x)=ax+b$ とおく. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)=(x^2+x+1)g(x)+ax+b$.

$g(x)=0$ の解を ω_1, ω_2 $(\omega_1\neq\omega_2)$ とすると, (1)より $\omega_1^3=\omega_2^3=1$, $g(\omega_1)=g(\omega_2)=0$ であり,

$f(\omega_1)=(\omega_1^3)^{2n}+(\omega_1^3)^n-2=1+1-2=0$, 同様に, $f(\omega_2)=0$ だから,

$f(\omega_1)=a\omega_1+b=0$ —①, $f(\omega_2)=a\omega_2+b=0$ —②

①−②より $a(\omega_1-\omega_2)=0$. $\omega_1\neq\omega_2$ より $a=0$. このとき $b=0$

よって, $r(x)=0$ となり $f(x)$ は $g(x)$ で割りきれる.　(証終)

(3) (証) $h(x)=x^2-x+1=0$ の虚数解の一つを β とおくと, (1)より $\beta^3=-1$

$f(x)$ が $h(x)$ で割りきれるとき $f(\beta)=(\beta^3)^{2n}+(\beta^3)^n-2=(-1)^{2n}+(-1)^n-2=0$

よって, $(-1)^n=1$ となり n は偶数である　(証終)

(4) $f(x)=x^6+x^3-2=(x^3+2)(x^3-1)=0$　$\therefore x^3=-2, 1$.

$x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0, 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと, $x^3=-2$ のとき

$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$. よって, $r^3=2$, $3\theta=\pi+2k\pi$ (kは整数)

$r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ より $r=\sqrt[3]{2}$, $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$.

$x^3=1$ のとき $r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=1\cdot(\cos0+i\sin0)$ より $r^3=1$, $3\theta=0+2k\pi$

$r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ より $r=1$, $\theta=\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$.

よって, $x=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k+1}{3}\pi+i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)$, $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$ …(答)

教育 $\boxed{2-2}$ 1枚目

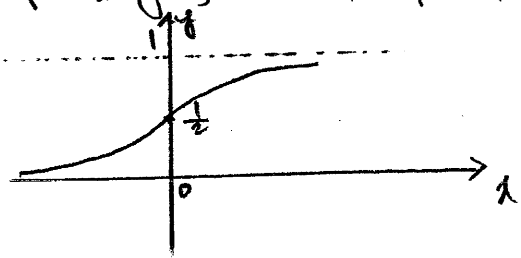
(1) $e^x+1>0$ より定義域はすべての実数

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

これから $f(x)$ は単調増加

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

これから $y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる



(2) $0\leqq x\leqq \log 2$ のとき $f(x)>0$ より

求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\log 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\log 2}\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$

$$=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^{\log 2}=\underline{\underline{\log\frac{3}{2}}}\ \text{(答)}$$

(3) 求める体積を V とおくと

$$V=\pi\int_0^{\log 2}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2dx$$

$t=e^x+1$ とおくと $dt=e^x dx$,

$x:0\to\log 2$ のとき $t:2\to3$

$$V=\pi\int_2^3\frac{t-1}{t^2}dt=\pi\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

教育 $\boxed{2-2}$ 2枚目

$$= \pi \left[\log|x| + \frac{1}{x} \right]_2^3$$

$$= \pi \left(\log\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdots \text{答}$$