$\boxed{1}$ #1

(1) $\cos 2\theta > \sin\theta \iff 1-2\sin^2\theta-\sin\theta>0 \iff 2\sin^2\theta+\sin\theta-1<0$

$\iff (\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)<0$

$\iff -1<\sin\theta<\frac{1}{2}$

ここで、$0\leqq\theta<2\pi$ ゆえ、

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$ ， $\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ， $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ ‥‥(答)

(2) $k=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)=3+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$ とおく。

$\frac{y}{x},\frac{x}{y},\frac{z}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{z}$ はすべて正ゆえ、相加平均と相乗平均の不等式より、

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqq2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$ ，(等号成立は $x=y$ のとき)

$\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqq2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}=2$ (等号成立は $y=z$ のとき)

$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geqq2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}=2$ (等号成立は $z=x$ のとき)

ゆえ、$k\geqq3+2+2+2=9$ (等号成立は $x=y=z$ のとき)

よって、求める最小値は 9 ，そのときの x,y,z の条件は $x=y=z$ ‥‥(答)

(3) ・「$a+b=2$ かつ $a-b=0$」のとき「$a=1$ かつ $b=1$」これを条件 p とおく。

「$(a-1)(b-1)=0$」のとき「$a=1$ または $b=1$」これを条件 q とおく。

よって、$p\Rightarrow q$ は真で、$q\Rightarrow p$ は偽 ゆえ、空欄(ア)は (い) ‥‥(答)

・「$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である」とき「$a=b=c=0$」

でこれを条件 r とおき，「$ax^2+bx+c=0$ をみたす実数 x が存在する」を

$\boxed{1}$ #2

条件sとおくと、$r \Rightarrow s$ は真で、$s \Rightarrow r$ は、反例として $a=1,\ b=c=0$ があり偽。

よって、空欄(イ)は、<u>(あ)</u> ……(答)

(2)の参考　コーシー・シュワルツの不等式より、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z}\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$$

$\therefore\ 9 \leqq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$　等号成立は $x=y=z$ のとき

以上により、<u>最小値9</u> ……(答)

$\boxed{2}$

(1) 真数条件より $3x+7>0$ かつ $x+1>0$ であるから $x>-1$ …①

(与式)を変形して $\log_2(3x+7)=\log_2(x+1)^2$

$3x+7=x^2+2x+1$ $\quad\therefore (x-3)(x+2)=0$

$x=3,\ -2$ $\quad$ ①より $\underline{\underline{x=3}}$ …(答)

(2) 真数条件より $3x+a-2>0$ …① かつ $x>2$ …②

(与式)を変形して $\log_2(3x+a-2)=\log_2(x-2)^3$

$3x+a-2=(x-2)^3$ …③ $\quad$ ここで②より①は成り立つので

以下 $x>2$ で考える

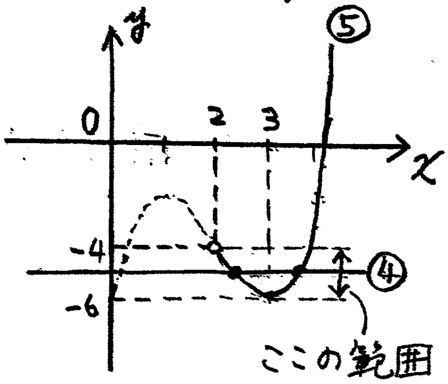
③より $a=x^3-6x^2+9x-6 \iff \begin{cases} y=a & \cdots ④ \\ y=x^3-6x^2+9x-6 & \cdots ⑤ \end{cases}$

⑤において $y'=3x^2-12x+9=3(x-3)(x-1)$ より

増減表は次のとおりとなる

x	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	(-4)	$\searrow$	-6	$\nearrow$

$x>2$ において④と⑤のグラフの共有点が2つあればよいので



グラフより $\underline{\underline{-6<a<-4}}$ …(答)

$\boxed{3-1}$ #1

(1) (証) $c_n = -2a_n + b_n$ ……① であるから

$$c_{n+1} = -2a_{n+1} + b_{n+1}$$

$$= -2\{(1-2\cdot 3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n\} + \{-4\cdot 3^{n-1}a_n + (2\cdot 3^{n-1}+1)b_n\}$$

$$= -2a_n + b_n$$

$= c_n$ ゆえに, $c_{n+1} = c_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つ. (証終)

(2) (1)より, $c_{n+1} = c_n$ であるから, $c_n = c_1 = -2a_1 + b_1 = -2+3 = 1$.

つまり, $c_n = 1$ $(n=1,2,3,\cdots)$. ……②

したがって, $d_n = a_{n+1} - a_n$

$$= (1-2\cdot 3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n - a_n = 3^{n-1}(-2a_n + b_n)$$

$$= 3^{n-1}c_n = 3^{n-1}$$

よって, $\underline{\underline{d_n = 3^{n-1}}}$ ……(答)

(3) (2)より $a_{n+1} - a_n = 3^{n-1}$.

よって, $n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$$ (これは $n=1$ のときも成り立つ)

したがって, $\underline{\underline{a_n = \dfrac{3^{n-1}+1}{2}}}$ ……(答)

$\boxed{3-1}$ #2

また，①②より $b_n = 2a_n + 1$ であるから

$$b_n = 2 \cdot \frac{3^{n-1}+1}{2} + 1 = \underline{\underline{3^{n-1}+2}} \quad \cdots\cdots (答)$$

3−2 #1

(1)(証) $A(a_1, a_2, k)$ とおくて $\overrightarrow{FA}=(a_1, a_2-1, k)$

3点F, A, A′は一直線上にあるので $\overrightarrow{FA'}=l\overrightarrow{FA}$ (lは実数)とおける。

これから $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OF}+l\overrightarrow{FA}$

$=(0,1,0)+l(a_1, a_2-1, k)$

$=(la_1, la_2-l+1, lk)$

A′のz座標は2より $lk=2$ から $l=\frac{2}{k}$

よって $\overrightarrow{FA'}=\frac{2}{k}\overrightarrow{FA}$ となる。(証終)

(2) (1)より $\overrightarrow{FB'}=6\overrightarrow{FB}$ から $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OF}+6\overrightarrow{FB}$

$=(0,1,0)+6\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$=(-2,-1,2)$ よって $\underline{\underline{B'(-2,-1,2)}}$ …(答)

(1)より $\overrightarrow{FC'}=2\overrightarrow{FC}$ から $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OF}+2\overrightarrow{FC}$

$=(0,1,0)+2(1,-1,1)$

$=(2,-1,2)$ よって $\underline{\underline{C'(2,-1,2)}}$ …(答)

(3) Pは平面α上を動くので $P(x, y, 2)$ とおける。

$\overrightarrow{PB'}=(-2-x, -1-y, 0)$

$\overrightarrow{PC'}=(2-x, -1-y, 0)$

3−2 #2

(3) つづき

$\overrightarrow{PB'} \perp \overrightarrow{PC'}$ より，$\overrightarrow{PB'} \cdot \overrightarrow{PC'} = (-2-x)(2-x) + (-1-y)(-1-y) = 0$ から

$x^2 - 4 + (y+1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$

よって 点Pの軌跡は 円 $\underline{\underline{x^2+(y+1)^2=4 \text{ かつ } z=2}}$ …(答)

ただし $\overrightarrow{PB'} \neq \vec{0}$　$\overrightarrow{PC'} \neq \vec{0}$ より 点$(-2,-1,2)$ $(2,-1,2)$ は除く

3−3

勝者をA, Bで表し、左から順に並べることにする。

(1) AAAのとき $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{18}$, BBBのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

これらから $\frac{4}{18}+\frac{1}{18}=\underline{\underline{\frac{5}{18}}}$ …(答)

(2) 第5ゲームで優勝が決まるのは第4ゲームまでで2勝2敗のときだから

AABBのとき $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$, ABABのとき $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{36}$

ABBAのとき $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$, BAABのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$

BABAのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{36}$, BBAAのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$

以上から $\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\underline{\underline{\frac{13}{36}}}$ …(答)

(3) Bが3勝0敗で優勝するのは $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

Bが3勝1敗で優勝するのは

ABBBのとき $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$, BABBのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{36}$

BBABのとき $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{36}$　よって $\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{36}$

Bが3勝2敗で優勝するのは第4ゲームまでで2勝2敗で第5ゲームに

Bが勝つときだから②より $\frac{13}{36}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{108}$

これらから $\frac{1}{18}+\frac{5}{36}+\frac{13}{108}=\frac{6+15+13}{108}$

$=\frac{34}{108}$

$=\underline{\underline{\frac{17}{54}}}$ …(答)

$\boxed{4}$

$\alpha = 4+3i,\ \beta = x+i,\ \gamma = 8i$

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{4+3i}{x+i} = \dfrac{(4+3i)(x-i)}{x^2+1} = \dfrac{4x+3+(-4+3x)i}{x^2+1}$

これが実数となるのは x が実数より $-4+3x=0$ $\therefore x = \underline{\underline{\dfrac{4}{3}}}$ …(答)

(2) $\beta-\alpha = (x+i)-(4+3i) = (x-4)-2i$

$\gamma-\alpha = 8i-(4+3i) = -4+5i$

よって

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{(x-4)-2i}{-4+5i} = \frac{\{(x-4)-2i\}(-4-5i)}{(-4)^2+5^2} = \frac{-4x+6+(-5x+28)i}{41}$$

直線ABと直線ACが垂直に交わるのは $\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ が純虚数となるとき

だから

$-4x+6=0$ かつ $-5x+28 \neq 0$ より $x = \underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$ …(答)

(3) (1)の過程より $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \dfrac{3x-4}{x^2+1}$. これを $f(x)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{-(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

また $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x+\frac{1}{x}} - \frac{4}{x^2+1}\right) = 0$ であるから

$f(x)$ の最大値, 最小値は

最大値 $\dfrac{1}{2}$ ($x=3$ のとき)
最小値 $-\dfrac{9}{2}$ ($x=-\dfrac{1}{3}$ のとき) …(答)

5 #1

(1) $f(x)=\dfrac{e^{x}-2e^{-2x}}{e^{x}+e^{-2x}}=\dfrac{e^{3x}-2}{e^{3x}+1}$ より $f'(x)=\dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$ 、よって $f'(0)=\dfrac{9}{4}$ なので、

ℓ の方程式は $y=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{2}$ …(答)、また、ℓ と $y=1$ の交点の x 座標は

$\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{2}=1$ より $x=\dfrac{2}{3}$、よって $a=\dfrac{2}{3}$ …(答)

(2) (証) $h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと $h'(x)=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}=\dfrac{9(e^{3x}-1)^2}{4(e^{3x}+1)^2}>0$ $(x>0)$.

よって、$h(x)$ は単調増加であり、$h(0)=0$ より $x>0$ のとき $h(x)>0$、すなわち

$f(x)<g(x)$、 (証終)

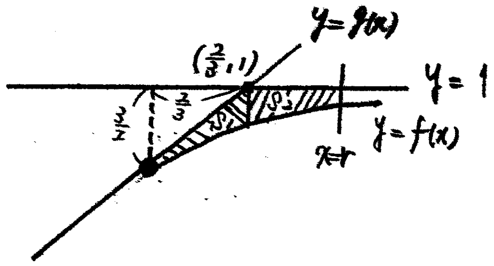
(3) (2) より求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_0^{\frac{2}{3}}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{(e^{x}+e^{-2x})'}{e^{x}+e^{-2x}}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{9}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\log|e^{x}+e^{-2x}|\right]_0^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{9}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\log\left(e^{\frac{2}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}\right)-(-\log 2)=\frac{3}{2}-\log\frac{e^2+1}{2}\ \cdots(\text{答})$$

(4) $1-f(x)=\dfrac{3}{e^{3x}+1}>0$ より $1>f(x)$、よって、



$$S(r)=S_1+S_2$$

$$=\int_0^{r}\{1-f(x)\}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\left[x-\log|e^{x}+e^{-2x}|\right]_0^{r}-\frac{1}{2}$$

$$=r-\log(e^{r}+e^{-2r})+\log 2-\frac{1}{2}$$

$$=r-\log e^{r}(1+e^{-3r})+\log 2-\frac{1}{2}$$

$$= r - \{\log e^r + \log(1+e^{-3r})\} + \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$= r - r - \log(1+e^{-3r}) + \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-\log(1+e^{-3r}) + \log 2 - \frac{1}{2}}} \quad \cdots (答)$$

また，$|e^{-3}| < 1$ より $\lim_{r\to\infty} \log(1+e^{-3r}) = \log 1 = 0$ より

$$\lim_{r\to\infty} S(r) = \underline{\underline{\log 2 - \frac{1}{2}}} \quad \cdots (答)$$

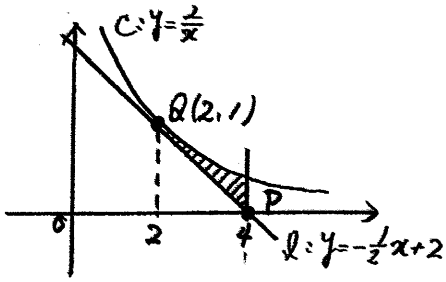
教育 $\boxed{2-2}$

(1) $C: y=\frac{2}{x}$。Cの式より $y'=-\frac{2}{x^2}$。よって、C上の点 $(t, \frac{2}{t})$ $(t>0)$

における接線の方程式は $y=-\frac{2}{t^2}(x-t)+\frac{2}{t}=-\frac{2}{t^2}x+\frac{4}{t}$ …①

①が点 $P(4, 0)$ を通るとき、$0=-\frac{2}{t^2}\times 4+\frac{4}{t}$ $\therefore t=2$.

よって、$\underline{Q(2, 1)}$。①より l は $\underline{y=-\frac{1}{2}x+2}$ …(答)



(2) 求める面積は右図の斜線部分なので

$\int_2^4 \frac{2}{x}dx-\frac{1}{2}\times 1\times 2$

$=\left[2\log x\right]_2^4-1=\underline{2\log 2-1}$ …(答)

(3) 求める体積は

$\int_2^4 \pi\left(\frac{2}{x}\right)^2 dx-\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times 2$

$=4\pi\int_2^4 \frac{1}{x^2}dx-\frac{2}{3}\pi$

$=4\pi\left[-x^{-1}\right]_2^4-\frac{2}{3}\pi$

$=\pi-\frac{2}{3}\pi$

$=\underline{\frac{\pi}{3}}$ …(答)