$\boxed{1}$

(1) 線分ABの中点をMとすると，$\angle OMA = \dfrac{\pi}{2}$ より

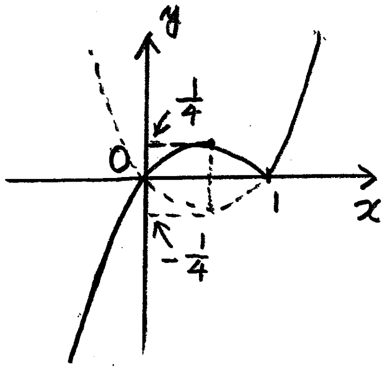
$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAM = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}| = 8\times4 = \underline{\underline{32}}$ …(答)

(2) (i) $x \geqq 1$ のとき $y = x(x-1)$

$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

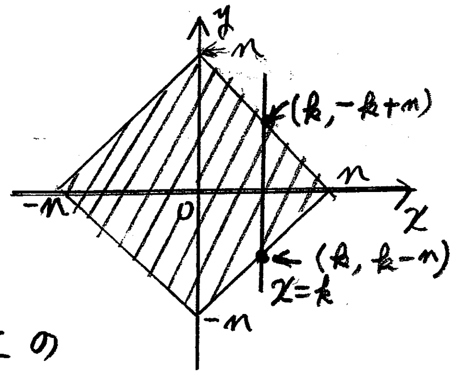
(ii) $x < 1$ のとき $y = -x(x-1)$

$$= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



(i)(ii)より グラフは 右上の実線部分となる

(3) 不等式 $|x|+|y| \leqq n$ で表される領域は、右図の斜線部分である（ただし境界線を含む）



直線 $x=k$（kはn以下の自然数）上の格子点の個数は $-k+n-(k-n)+1 = -2k+2n+1$ であり，y軸上には $2n+1$(個) あるので 対称性より

求める個数は $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2k+2n+1)+2n+1$

$$= 2\cdot\frac{n}{2}(2n-1+1)+2n+1 = \underline{\underline{2n^2+2n+1}} \cdots(\text{答})$$

(4) Uを全事象，Aが隣り合う事象をP，Bが隣り合う事象をQとすると $n(U) = \dfrac{5!}{2!\,2!} = 30$，$n(P) = \dfrac{4!}{2!} = 12$

$n(Q) = 12$，$n(P\cap Q) = 3! = 6$ であるから

$n(\overline{P}\cap\overline{Q}) = n(U) - n(P) - n(Q) + n(A\cap B) = \underline{\underline{12\ (\text{通り})}} \cdots(\text{答})$

医学部の $\boxed{2}$

球はすべて区別して考える。

(1) 求める確率は $\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\underline{\underline{\dfrac{8}{45}}}$ …(答)

(2) 2回目に赤い球が出るのは

1回目に赤，2回目に赤が出る または 1回目に白，2回目に赤が出る場合があり，確率は $\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\underline{\underline{\dfrac{1}{5}}}$ …(答)

(3) 3回目に赤い球が出るのは、次の3パターンある。

1回目に赤，2回目に白，3回目に赤 が出る。

1回目に白，2回目に赤，3回目に赤 が出る。

1回目に白，2回目に白，3回目に赤 が出る。

求める確率は $\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}\times\dfrac{2}{8}=\underline{\underline{\dfrac{1}{5}}}$ …(答)

(4) 3回とも白い球が出る確率は $\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}\times\dfrac{6}{8}=\dfrac{7}{15}$

取り出した白い球の個数を X とすると X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	計
確率	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	1

求める期待値は $1\times\dfrac{1}{15}+2\times\dfrac{7}{15}+3\times\dfrac{7}{15}=\underline{\underline{\dfrac{12}{5}}}$ …(答)

(参考)　2回目，3回目に赤，白が出る確率は，1回目に赤，白が出る確率と同様にそれぞれ $\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$ である。

また，3回続けて取り出すときの白い球の個数の期待値は，それぞれの回で出る白い球の個数の期待値をすべて足すことで求められるので $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

3

(1) 楕円 C_a を x 軸方向に $\frac{-a}{1-a}$ だけ平行移動すると中心が $(0, 0)$ となる。ここで楕円 $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ の面積は $\pi\alpha\beta$ であるから，

$$S_1(a)=\pi\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{a\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{a^2\sqrt{1-a^2}}{(1-a)^2}\pi}}\cdots\text{(答)}$$

(2) (証) C_a の方程式の両辺を x で微分して

$$\frac{2}{\left(\frac{a}{1-a}\right)^2}\left(x-\frac{a}{1-a}\right)+\frac{2y}{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{a^2(1+a)}{1-a}}{y\left(\frac{a}{1-a}\right)^2}\left(x-\frac{a}{1-a}\right) \text{ となるから}$$

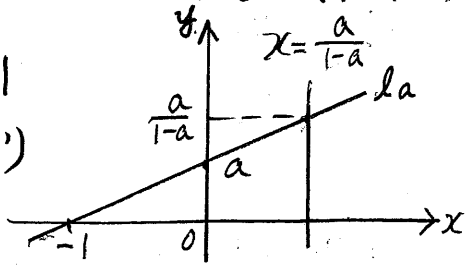
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a,\ y=a+a^2}=-\frac{(1+a)(1-a)}{a(a+1)}\left(\frac{-a^2}{1-a}\right)=a$$

したがって l_a の方程式は $y=a(x-a)+a+a^2$ より

$y=ax+a$ である (証終)

(3) $y=ax+a=0$ とおくと $x=-1$

したがって 3直線は右の図のとおり



$$\therefore S_2(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-a}+1\right)\left(\frac{a}{1-a}\right)=\frac{a}{2(1-a)^2}$$

$$S(a)=\frac{S_2(a)}{S_1(a)}=\frac{\frac{a}{2(1-a)^2}}{\frac{a^2\sqrt{1-a^2}}{(1-a)^2}\pi}=\frac{1}{2\pi a\sqrt{1-a^2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2-a^4}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

ここで $0<a^2<1$ より $-\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ は $a^2=\frac{1}{2}$

すなわち $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき 最大値 $\frac{1}{4}$ をとるので

$S(a)$ は $\underline{\underline{a=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき 最小となり 最小値 }\frac{1}{\pi}}}\cdots$(答)

$\boxed{4}$

$I_n = \int_0^1 \frac{3x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$ （nは自然数）

(1) $(右辺) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+(2b+c)x+a+2c}{(x+2)(x^2+1)}$

左辺と係数を比較して

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2b+c=3 \\ a+2c=1 \end{cases}$ 。 これを解くと $\underline{\underline{a=-1,\ b=1,\ c=1}}$ …(答)

(2) (証) $\tan\theta$ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において連続かつ単調に増加し、その値域は

$(0,\infty)$ である。nは $n \geqq 1$ であり、この値域に含まれるので、$\tan\theta = n$

を満たす θ_n が $0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ にただ一つ存在する。(証終)

(3) (1)を用いて

$$I_n = \int_0^n \frac{3x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \int_0^n \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \int_0^n \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

ここで

$$\int_0^n \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \Big[-\log|x+2| + \frac{1}{2}(x^2+1) \Big]_0^n$$

$$= -\log(n+2) + \log 2 + \frac{1}{2}\log(n^2+1)。$$

また、$x = \tan\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とすると、$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$、(2)より $\begin{array}{c|c} x & 0 \to n \\ \hline \theta & 0 \to \theta_n \end{array}$

であるから

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\theta_n} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\theta_n} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\theta_n} = \theta_n$$

よって、

$$I_n = -\log(n+2) + \log 2 + \frac{1}{2}\log(n^2+1) + \theta_n = \underline{\underline{\log\frac{2\sqrt{n^2+1}}{n+2} + \theta_n}} \ \cdots(答)$$

(4) $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}} + \theta_n \right) = \underline{\underline{\log 2 + \frac{\pi}{2}}}$ （ただし書きより） …(答)

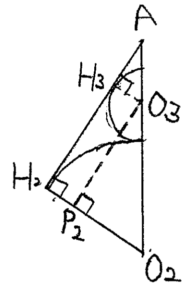
教育の 3-1

(1) (証) $\triangle AO_1H_1 \backsim \triangle AO_2H_2$ より

$$H_1O_1 : H_2O_2 = AO_1 : AO_2 \Leftrightarrow r_1 : r_2 = (h-r_1) : (h-2r_1-r_2)$$

$$\Leftrightarrow (h-r_1)r_2 = (h-2r_1-r_2)r_1 \Leftrightarrow hr_2 = (h-2r_1)r_1 \Leftrightarrow r_2 = r_1\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)$$ (証終)

(2) (証) O_3 から線分 O_2H_2 に下ろした垂線の足を P_2 とする



$\triangle AO_1H_1 \backsim \triangle AO_2H_2$ および $\triangle AO_2H_2 \backsim \triangle O_3O_2P_2$ より

$\triangle AO_1H_1 \backsim \triangle O_3O_2P_2$

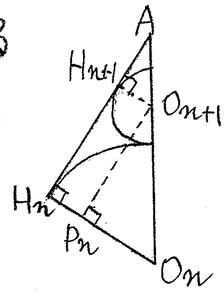
$AO_1 : O_1H_1 = O_3O_2 : O_2P_2$ より

$$(h-r_1) : r_1 = (r_2+r_3) : (r_2-r_3) \Leftrightarrow (h-r_1)(r_2-r_3) = r_1(r_2+r_3)$$

$$\Leftrightarrow (h-2r_1)r_2 = hr_3 \Leftrightarrow r_3 = \left(1-\frac{2r_1}{h}\right)r_2$$

(1)より $r_2 = \left(1-\frac{2r_1}{h}\right)$ なので $r_3 = r_1\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)^2$ (証終)

(3) (証) O_{n+1} から線分 O_nH_n に下ろした垂線の足を P_n とする



$\triangle AO_1H_1 \backsim \triangle AO_nH_n$ および $\triangle AO_nH_n \backsim \triangle O_{n+1}O_nP_n$ より

$\triangle AO_1H_1 \backsim \triangle O_{n+1}O_nP_n$

$AO_1 : O_1H_1 = O_{n+1}O_n : O_nP_n$ より

$$(h-r_1) : r_1 = (r_n+r_{n+1}) : (r_n-r_{n+1}) \Leftrightarrow r_{n+1} = r_n\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)$$

よって 数列 $\{r_n\}$ は初項 r_1，公比 $1-\frac{2r_1}{h}$ の等比数列である

$\therefore$ $n \geqq 4$ において $r_n = r_1\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)^{n-1}$ (証終)

$f(x)=2\sqrt{x}-x$，$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(1) $C_1=\int_0^1\left\{2\sqrt{x}-x-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$

$=\underline{\underline{\frac{5}{6}-\frac{2}{\pi}}}$ …(答)

$C_2=\int_0^1\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x\right\}dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}}}$ …(答)

また，$C_1-C_2=\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{\pi}\right)-\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}\right)$

$\pi>3$ より $\frac{1}{\pi}<\frac{1}{3}$ なので $C_1-C_2>0$　∴ $\underline{\underline{C_1>C_2}}$ …(答)

(2) $T=\sqrt{x}\ (x>0)$ とおくと

$x^2-3x+2\sqrt{x}=T^4-3T^2+2T=T(T^3-3T+2)=\underline{\underline{T(T-1)^2(T+2)}}$ …(答)

(3) $g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$，$g''(x)=\underline{\underline{-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$ …(答)

$0<x<\frac{1}{2}$ より $0<\frac{\pi}{2}x<\frac{\pi}{4}$ なので $0<\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

よって，$g''(x)<0$ なので $y=g(x)$ のグラフは$\underline{\underline{\text{上に凸}}}$ …(答)

(4) (証) (2)の結果を用いて

$f(x)-(2x-x^2)=x^2-3x+2\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)>0$.

∴ $f(x)>2x-x^2$ —①

また，$h(x)=(2x-x^2)-g(x)$ とおくと $h''(x)=-2-g''(x)=-2+\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(3)の過程から $0<\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)<\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$

ここで，$2-\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}-\pi^2}{4\sqrt{2}}>\frac{8\times1.4-3.2^2}{4\sqrt{2}}=\frac{11.2-10.24}{4\sqrt{2}}>0$ だから

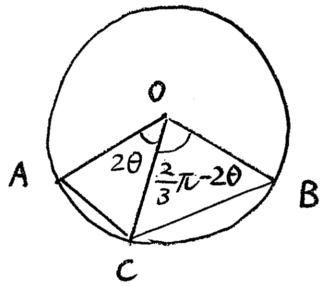
$\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}<2$ より $h''(x)<0$. よって $y=h(x)$ は上に凸な連続関数であり，

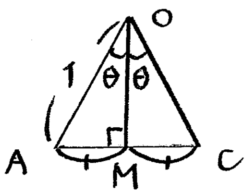
$h(0)=0$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}>0$ であるから $0<x<\frac{1}{2}$ において $h(x)>0$ となり

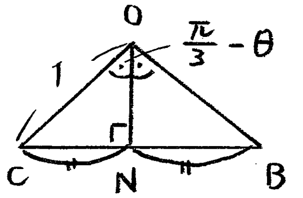
$2x-x^2>g(x)$ —②，①，②より 題意は示された　(証終)

水産の $\boxed{3}$

(1) 線分ACの中点をM，線分BCの中点をNとする。







上図より　$\overline{AC} = 2AM = \underline{\underline{2\sin\theta}}$ $\cdots$（答）

$\overline{BC} = 2CN = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) = \underline{\underline{\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}}$ $\cdots$（答）

(2) $L(\theta) = 2\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$= 2\cdot 4\sin^2\theta + (\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)^2$

$= 9\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$= 9\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \sqrt{3}\cdot\sin 2\theta$

$= \underline{\underline{-\sqrt{3}\sin 2\theta - 3\cos 2\theta + 6}}$ $\cdots$（答）

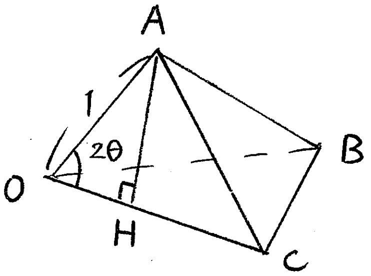
(3) $L(\theta) = 2\sqrt{3}\sin\left(2\theta + \frac{4}{3}\pi\right) + 6$

$0 < 2\theta < \frac{2}{3}\pi$ のとき　$\frac{4}{3}\pi < 2\theta + \frac{4}{3}\pi < 2\pi$ であるから

$2\theta + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$ つまり $\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき

$L(\theta)$は $\underline{\underline{\text{最小値 } 6-2\sqrt{3}}}$ をとる。 $\cdots$（答）

(4) Aから直線OCに下ろした垂線の



足をHとすると $AH = \sin 2\theta$

また △OBCの面積は

$$\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cdot\sin 2\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos 2\theta + \sin 2\theta\right)$$

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos 2\theta + \sin 2\theta\right)\cdot \sin 2\theta \\
&= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta + \sin^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}\sin 4\theta - \cos 4\theta\right) + \frac{1}{24} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{12}\sin\left(4\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{24}}} \quad \cdots (答)
\end{aligned}$$

$0 < 2\theta < \frac{2}{3}\pi$ のとき $-\frac{\pi}{6} < 4\theta - \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$ であるから

$4\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ つまり $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき

$V(\theta)$ は 最大値 $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$ をとる。… (答)