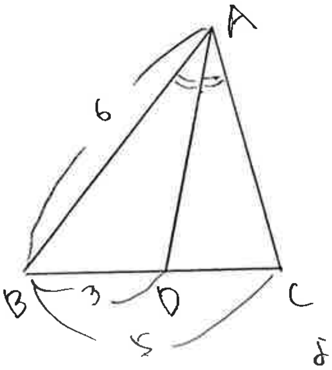
1

(1)



$BC=5,\ BD=3$ より $DC=2$

AD は $\angle A$ の二等分線だから

$AB:AC=BD:DC$

よって $6:AC=3:2$

これから $\underline{\underline{AC=4}}$ …(答)

(2)(証) k を自然数として、n は $6k,\ 6k-1,\ 6k-2,\ 6k-3,\ 6k-4,\ 6k-5$ の

いずれかで表される。このなかで 6 と互いに素であるものは

$6k-1,\ 6k-5$ である

i) $n=6k-1$ のとき

$$n^2-1=36k^2-12k+1-1$$
$$=6(6k^2-2k)$$

$6k^2-2k$ は整数だから n^2-1 は 6 で割り切れる

ii) $n=6k-5$ のとき

$$n^2-1=36k^2-60k+25-1$$
$$=6(6k^2-10k+4)$$

$6k^2-10k+4$ は整数だから n^2-1 は 6 で割り切れる

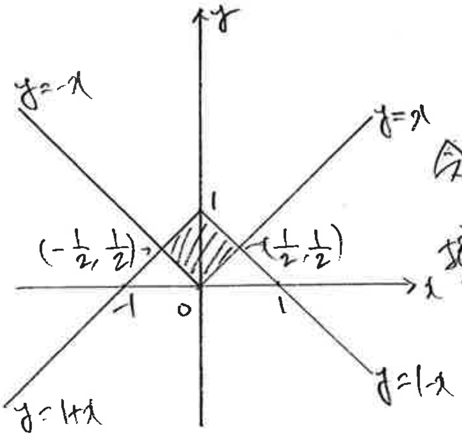
これから、自然数 n が 6 と互いに素であるとき n^2-1 は 6 で割り切れる (証終)

(3) i) $x\geqq 0$ のとき $x\leqq y\leqq 1-x$

ii) $x<0$ のとき $-x\leqq y\leqq 1+x$

$x=1-x$ とおくと $x=\frac{1}{2}$

$-x=1+x$ とおくと $x=-\frac{1}{2}$



領域は斜線部分で

境界は含む.

(1) (証) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると

$$P(x)=Q(x)S(x)+R(x) \quad \cdots\cdots ①$$

方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解を α とおくと

$$P(\alpha)=0,\ Q(\alpha)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

①より $P(\alpha)=Q(\alpha)S(\alpha)+R(\alpha)$ ②より $R(\alpha)=0$

よって，α は $R(x)=0$ の解である。

したがって方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である。

逆に，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解を β とおくと

$$Q(\beta)=0,\ R(\beta)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

①より $P(\beta)=Q(\beta)S(\beta)+R(\beta)$ ③より $P(\beta)=0$

よって，β は $P(x)=0$ の解である。

したがって方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解である。 (証終)

(2) $P(x)=x^4+2x^3+x^2-1$，$Q(x)=x^3+2x^2-1$ より

$$P(x)=x\cdot Q(x)+x^2+x-1$$

ここで $R(x)=x^2+x-1$ とおくと (1) より方程式 $P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解であり，$Q(x)=(x+1)\cdot R(x)$ とできるので，方程式 $Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は $R(x)=0$ の解である。

$h(x)=0$ を解くと

$x^2+x-1=0$ より　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

以上より 求める共通解は

$$\underline{\underline{x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}} \quad \cdots(答)$$

3−1

(1) $a_1=a_2=1$ —①　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ —②　$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}\ (\alpha>0)$ —③　とする。

①,②より帰納的に $a_n>0$ であるから、②の両辺を a_{n+1} で割って

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$．　よって，$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ より　$b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}\ (n=1,2,\ldots)$ …(答)

(2) (証) すべての自然数 n に対して，$b_n\geqq 1$ であることを数学的帰納法で示す。

(I) $n=1$ のとき　$b_1=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{1}=1$ (①より) より成り立つ。

(II) $n=k$ のとき　$b_k\geqq 1$ であると仮定すると，(1)の結果より

$b_{k+1}=1+\frac{1}{b_k}>1$ (仮定より)．　よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(I),(II)より　$b_n\geqq 1\ (n=1,2,\ldots)$ が示された　(証終)

(3) (証)　$|b_{n+1}-\alpha|=\left|1+\frac{1}{b_n}-\alpha\right|$　((1)の結果より)

$=\left|1+\frac{1}{b_n}-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right|$　(③より)

$=\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}\right|$

$=\left|\frac{\alpha-b_n}{\alpha b_n}\right|$

$=\frac{|b_n-\alpha|}{\alpha|b_n|}$　($\alpha>0$ より)

$\leqq\frac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$　((2)より)

よって，$|b_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|\ (n=1,2,\ldots)$　(証終)

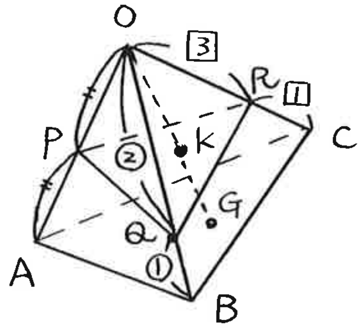
(4) (証) (3)の結果を繰り返し用いると，

$|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha}|b_{n-1}-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha^2}|b_{n-2}-\alpha|\leqq\cdots\leqq\frac{1}{\alpha^{n-1}}|b_1-\alpha|$ —(＊)

ここで，$|b_1-\alpha|=|1-\alpha|=\left|-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{\alpha}\ (\alpha>0)$ より
(③より)

よって，(＊)より　$|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha^{n-1}}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha^n}\ (n=1,2,\ldots)$　(証終)

3−2



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

点Gは、三角形ABCの重心なので

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

3点、O, K, Gは同一直線上にあるので、

$\overrightarrow{OK}=l\,\overrightarrow{OG}$ (lは実数) とおけ、

$$\overrightarrow{OK}=\frac{l}{3}\vec{a}+\frac{l}{3}\vec{b}+\frac{l}{3}\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

また、4点K, P, Q, Rは同一平面上にあるので、

$\overrightarrow{PK}=s\,\overrightarrow{PQ}+t\,\overrightarrow{PR}$ (s, tは実数) とおけ、

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

4点O, A, B, Cは同一平面上にないので、①, ②より

$$\begin{cases}\dfrac{l}{3}=\dfrac{1}{2}(1-s-t)\\[2mm] \dfrac{l}{3}=\dfrac{2}{3}s\\[2mm] \dfrac{l}{3}=\dfrac{3}{4}t\end{cases}$$

これを解くと、$l=\dfrac{18}{29}$, $s=\dfrac{9}{29}$, $t=\dfrac{8}{29}$

よって、 $\overrightarrow{OK}=\dfrac{18}{29}\overrightarrow{OG}$ なので

OK : KG = 18 : 11 ・・・(答)

(参考) 上のlの値は、次のようにして求めてもよい。

①に $\vec{a}=2\overrightarrow{OP}$, $\vec{b}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OQ}$, $\vec{c}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OR}$ を代入して、

3−2 のつづき

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}l\,\overrightarrow{OP} + \frac{l}{2}\overrightarrow{OQ} + \frac{4}{9}l\,\overrightarrow{OR}$$

4点 K, P, Q, R は同一平面上にあるので

$\frac{2}{3}l + \frac{l}{2} + \frac{4}{9}l = 1$ を解いて, $l = \frac{18}{29}$

3−3

(1) 1個のさいころを投げて1または2の目が出る確率は

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ で，確率変数 X は 二項分布 $B(10,\frac{1}{3})$ に従うので，

$E(X)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$(回)…(答)，$\sigma(X)=\sqrt{10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$(回)…(答)

(2) $E(X)=\int_0^5 xf(x)dx=\int_0^5\frac{2}{25}x^2dx=\left[\frac{2}{75}x^3\right]_0^5=\frac{10}{3}$ …(答)

$$V(X)=\int_0^5\left(x-\frac{10}{3}\right)^2f(x)dx=\frac{2}{25}\int_0^5\left(x^3-\frac{20}{3}x^2+\frac{100}{9}x\right)dx$$

$$=\frac{2}{25}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{20}{9}x^3+\frac{50}{9}x^2\right]_0^5=\frac{2}{5^2}\cdot5^2\left(\frac{5^2}{4}-\frac{20}{9}\cdot5+\frac{50}{9}\right)$$

$$=2\cdot5^2\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)=50\cdot\frac{9-8}{4\cdot9}=\frac{25}{18}$$ …(答)

(3) (証)

	A	$\overline{A}$
B	$A\cap B$	$\overline{A}\cap B$
$\overline{B}$	$A\cap\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$

上の図から $B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$，$\emptyset=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B)$

が成り立つので，X が起こる確率を $P(X)$ で表すと，

$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$ ……①

ここで，A と B が独立であるとき，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ が成り立つ

ことから $P(\overline{A})\cdot P(B)=\{1-P(A)\}\cdot P(B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)$

$=P(B)-P(A\cap B)=P(\overline{A}\cap B)$ （①より）

したがって $\overline{A}$ と B は独立である。 (証終)

$\boxed{4}$

$f(x) = (\log x)^2 - \log x \quad (x>0)$.

(1) $f(x)=0$ より $\log x(\log x - 1) = 0$ $\quad \therefore \log x = 0,\ 1$ $\quad$ よって, $\underline{\underline{x = 1,\ e}}$ …(答)

(2) $f'(x) = 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \underline{\underline{\dfrac{2\log x - 1}{x}}}$. …(答) $\quad f'(x)=0$ のとき $x = e^{\frac{1}{2}}$.

$f''(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\cdot x - (2\log x - 1)\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{3-2\log x}{x^2}}}$. …(答) $\quad f''(x)=0$ のとき $x = e^{\frac{3}{2}}$.

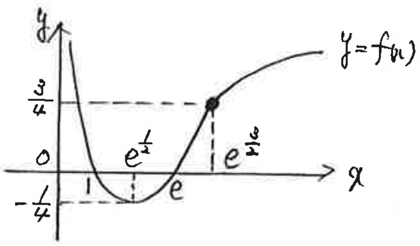
よって, 増減, 凹凸は以下の表の通り.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小	↗	変曲点	↗

極小値 $f(e^{\frac{1}{2}}) = -\dfrac{1}{4}$, 変曲点 $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{4}\right)$

また, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \log x(\log x - 1) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log x(\log x - 1) = \infty$

以上により, グラフの概形は下図の通り.



…(答)

(3) 求める面積 S は上図より $\displaystyle S = -\int_1^e \{(\log x)^2 - \log x\}\,dx$.

ここで, $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C_1$,

$\displaystyle\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C_2$.

(C_1, C_2 は積分定数)

よって,

$S = -\left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x - (x\log x - x)\right]_1^e$

$= -\left[x(\log x)^2 - 3x\log x + 3x\right]_1^e$

$= -\{(e - 3e + 3e) - 3\} = \underline{\underline{3-e}}$ …(答)

5

(1) (証) $z = a + bi$, $w = c + di$ とおく。

ただし、a, b, c, d は実数。i は虚数単位とする。

(a) $\overline{z+w} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$\overline{z}+\overline{w} = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$

となるので、$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ が成り立つ。

(b) $\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{z}\,\overline{w} = (\overline{a+bi})(\overline{c+di}) = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$

となるので $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ が成り立つ。

以上より、示された。　(証終)

(2) (a) $z^2 - z + 1 = 0$ を解くと、$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

よって、α, β は $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ・・・(答)

また、それぞれ極形式で表すと、

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ・・・(答)

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ ・・・(答)

(b)　(a)の結果より，

$$\alpha^{100}+\beta^{100}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}+\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right\}^{100}$$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}+\left\{\cos\left(\frac{-100\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-100\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2\cos\frac{100\pi}{3}\qquad(\because\ \sin(-\theta)=-\sin\theta\text{ より})$$

$$=2\cos\left(32+\frac{4}{3}\right)\pi$$

$$=2\cos\frac{4}{3}\pi$$

$$=\underline{\underline{-1}}\quad\cdots(\text{答})$$

(参考)　(2)(b)において，次のように解いてもよい。

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}^3=\cos(\pm\pi)+i\sin(\pm\pi)=-1\ (\text{複号同順})$$

よって，$\alpha^3=\beta^3=-1$ なので

$$\alpha^{100}+\beta^{100}=(\alpha^3)^{33}\cdot\alpha+(\beta^3)^{33}\cdot\beta=-(\alpha+\beta)=-1$$

教育

2－2

$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

(1) $f'(x) = -\sin x + x$ ・・・(答)

$f''(x) = -\cos x + 1$ ・・・(答)

(2)(証)(i) $f'(x) \geqq 0$ を示す.

$x \geqq 0$ のとき

$f''(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ であるから 関数 $f'(x)$ は単調に増加する.

また, $f'(0) = 0$ より $f'(x) \geqq 0$ である.

(ii) $f(x) \geqq 0$ を示す.

$x \geqq 0$ のとき

(i)により $f'(x) \geqq 0$ であるから 関数 $f(x)$ は単調に増加する.

また, $f(0) = 0$ より $f(x) \geqq 0$ である.

(証終)

(3)(証)(2)により区間 $[0, 1]$ において, $f(x) \geqq 0$ であるから

$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq 0$

すなわち

$\int_0^1 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right) dx \geqq 0$ より $\left[\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 \geqq 0$

ゆえに

$\sin 1 - 1 + \frac{1}{6} \geqq 0$

よって, $\sin 1 \geqq \frac{5}{6}$ が成り立つ. (証終)