$\boxed{1}$ #1

(1) ℓ上の任意の点をQ(x, y)とおくと、AQ=BQ より $AQ^2=BQ^2$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-4)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-8y+16$$

$$4x-6y+7=0 \cdots ①$$

このとき、点Q(x, y)は、直線①上にある。

これから　ℓ: $\underline{\underline{4x-6y+7=0}}$ ------ (答)

①から　$y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$

$x=2$のとき　$y=\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{7}{6}=\frac{8}{6}+\frac{7}{6}=\frac{15}{6}>2$

このことから、点P(2, 2)は、<u>点Aのある領域に属する</u>. ------ (答)

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ が成り立つことから

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=30+80-n(A\cup B)$$

$$=110-n(A\cup B)$$

ここで、$n(A)<n(B)$ より　$n(B)\leqq n(A\cup B)\leqq n(U)$

$$80\leqq n(A\cup B)\leqq 100$$

$$\therefore\ 10\leqq n(A\cap B)\leqq 30$$

$\boxed{1}$ #2

最大値 30（$A \subset B$ のとき），最小値 10（$U = A \cup B$ のとき）……（答）

(3) $5x + 8y = 139$ --- ①

$x = 23$，$y = 3$ は，①の正の整数解の1つである。

よって，$5 \cdot 23 + 8 \cdot 3 = 139$ --- ②

①－②から　$5(x - 23) + 8(y - 3) = 0$

$5(x - 23) = -8(y - 3)$ --- ③

5と8は互いに素であるから，$x - 23$ は 8の倍数である。

よって，kを整数として，$x - 23 = 8k$ と表わされる。

これを③に代入すると

$5 \cdot 8k = -8(y - 3)$　$\therefore\ y - 3 = -5k$

したがって，$x = 8k + 23$，$y = -5k + 3$ --- ④

x，yは正の整数だから　$x \geqq 1$，$y \geqq 1$

$8k + 23 \geqq 1$，$-5k + 3 \geqq 1$　$\therefore\ -\frac{22}{8} \leqq k \leqq \frac{2}{5}$

kは整数より　$k = -2, -1, 0$

$k = -2$ のとき，④より　$(x, y) = (7, 13)$

$k = -1$ のとき　④より　$(x, y) = (15, 8)$

$k = 0$ のとき　④より　$(x, y) = (23, 3)$

$\boxed{1}$ #3

$(x, y) = \underline{\underline{(7, 13), (15, 8), (23, 3)}}$ ------ (答)

2 ①

(1) $\frac{1}{x^2}f(x)=x^2+2\alpha x+(\alpha^2-\beta^2+2)+2\alpha\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+(\alpha^2-\beta^2+2)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+(\alpha^2-\beta^2)$

$=\underline{\underline{y^2+2\alpha y+\alpha^2-\beta^2}}$ …(答)

(2) $f(0)=1\neq0$ より．以下 $x\neq0$ として考える

$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ のとき

(1)より $\frac{1}{x^2}f(x)=y^2+y-2$

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}f(x)=0$

$\Leftrightarrow(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2,1$

i) $y=-2$ のとき

$x+\frac{1}{x}=-2$ $x^2+2x+1=0\Leftrightarrow(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$

ii) $y=1$ のとき

$x+\frac{1}{x}=1$ $x^2-x+1=0$ $\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

i), ii)より $\underline{\underline{x=-1\ (重解),\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}}$ …(答)

(3) $x\neq0$ のとき $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}f(x)=0$

$\frac{1}{x^2}f(x)=0\Leftrightarrow y^2+2\alpha y+\alpha^2-\beta^2=0$ ((1)より) …①

$y=x+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-yx+1=0\ (x\neq0)$ …②

$\boxed{2}$ ②

$f(x)=0$ がちょうど1つの解をもつには．x の方程式②が重解をもつことが必要

このとき②の判別式 $y^2-4=0$ より $y=\pm 2$

よって y の方程式①が $y=2$ または -2 を重解として持てばよい

イ) $y=2$ を重解にもつとき

$(y-2)^2=0 \iff y^2-4y+4=0$ より $\begin{cases} 2\alpha=-4 \\ \alpha^2-\beta^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=0 \end{cases}$

ロ) $y=-2$ を重解にもつとき

$(y+2)^2=0 \iff y^2+4y+4=0$ より $\begin{cases} 2\alpha=4 \\ \alpha^2-\beta^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=0 \end{cases}$

以上より求める α, β は $(\alpha, \beta)=\underline{\underline{(\pm 2, 0)}}$ …(答)

3−1 #1

(1) $p=1$ のとき $a_{n+1}=a_n+3n^2+3n$

$n \geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+3k)$

$=1+3\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+3\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=\frac{2+2n^3-3n^2+n+3n^2-3n}{2}$

$=n^3-n+1$

$n=1$ のとき $1^3-1+1=1$, $a_1=1$ より $n=1$ のときも成り立つ

これから $\underline{\underline{a_n=n^3-n+1}}$ …(答)

(2) $a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$ から

$a_{n+1}=pa_n+\alpha(p-1)n^2+(-2\alpha-\beta+p\beta)n-\alpha-\beta-\gamma+p\gamma$

これがすべての自然数 n について (※) と等しいから

$\alpha(p-1)=3$ …①, $-2\alpha-\beta+p\beta=3$ …② $-\alpha-\beta-\gamma+p\gamma=0$ …③

これを $p\neq1$ の下で解く.

①より $\alpha=\frac{3}{p-1}$

②に代入して $\frac{-6}{p-1}+(p-1)\beta=3$ から $\beta=\frac{3(p+1)}{(p-1)^2}$

③に代入して $\frac{-3}{p-1}-\frac{3(p+1)}{(p-1)^2}+\gamma(p-1)=0$ から $\gamma=\frac{6p}{(p-1)^3}$

これから $\underline{\underline{\alpha=\frac{3}{p-1},\ \beta=\frac{3(p+1)}{(p-1)^2},\ \gamma=\frac{6p}{(p-1)^3}}}$ …(答)

(3) $p=2$ より (2)から $\alpha=3$、$\beta=9$、$\gamma=12$

これを(2)の式に代入して

$$a_{n+1}+3(n+1)^2+9(n+1)+12=2(a_n+3n^2+9n+12)$$

これは数列$\{a_n+3n^2+9n+12\}$が初項$a_1+3+9+12=25$

公比2の等比数列であることを示すので

$$a_n+3n^2+9n+12=25\cdot 2^{n-1}$$

これから $\underline{\underline{a_n=25\cdot 2^{n-1}-3n^2-9n-12}}$ …(答)

$\boxed{3-2}$

(1) $A(1,0,0)$, $B(-1,k,k)$ より $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,k,k)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1,0,0)+t(-2,k,k)=(1-2t,kt,kt)$.

$\therefore$ $\underline{\underline{P(1-2t,kt,kt)}}$ …(答)

(2) 直線ABが球Sと共有点をもつのは，PがS上にあるような実数tが存在するとき．$S: x^2+(y-1)^2+z^2=1$ と(1)の結果より

$(1-2t)^2+(kt-1)^2+(kt)^2=1$　　$(2k^2+4)t^2-2(k+2)t+1=0$ —①

$2k^2+4\neq 0$ より ①の判別式をDとすると

$D/4=(k+2)^2-(2k^2+4)\geqq 0$ であればよい．すなわち $k(k-4)\leqq 0$

$\therefore$ $\underline{\underline{0\leqq k\leqq 4}}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-1,1,0)$ より $|\overrightarrow{AB}|^2=(-2)^2+k^2+k^2=2k^2+4$,

$|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+1^2+0^2=2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\cdot(-1)+k\cdot 1+k\cdot 0=k+2$. よって

$T=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2k^2+4)\cdot 2-(k+2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{3k^2-4k+4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\left(k-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}}$

(2)の結果より $0\leqq k\leqq 4$ であるから，

$\underline{\underline{T\text{の最大値 } 3\ (k=4\text{のとき}),\ \text{最小値 } \dfrac{\sqrt{6}}{3}\ \left(k=\dfrac{2}{3}\text{のとき}\right)}}$ …(答)

(1) $X_n \leqq 8 \Leftrightarrow$「$n$回とも8以下を取り出す」

であるから、

$$P(X_{(n)} \leqq 8) = \left(\frac{8}{10}\right)^n = \underline{\underline{\left(\frac{4}{5}\right)^n}} \quad \cdots\cdots (答)$$

(2) 求める確率は

$$P(X_{(n)} = 8) = P(X_{(n)} \leqq 8) - P(X_{(n)} \leqq 7)$$

であり、(1)と同様にして、

$$P(X_{(n)} \leqq 7) = \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

ゆえ、

$$P(X_{(n)} = 8) = \left(\frac{8}{10}\right)^n - \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

$$= \underline{\underline{\frac{8^n - 7^n}{10^n}}} \quad \cdots\cdots (答)$$

(3) $X_{(2)} \geqq 6 \Leftrightarrow$「少なくとも$(n-1)$回は6以上を取り出す」

$\Leftrightarrow$ A:「5以下を0回取り出す」

または B:「5以下を1回取り出す」

であり、

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(B) = {}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となるから、$P(X_{(2)} \geqq 6) < \frac{1}{2}$ に用いて、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2}$$

すなわち、

$$(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 1$$

$$n+1 < 2^{n-1}$$

となり、これをみたす最小のnを見つける。

$n=2$ のとき、$3 > 2$

$n=3$ のとき、$4 = 4$

$n=4$ のとき、$5 < 8$

以上により、求める試行回数nの最小値は、

$\underline{\underline{n=4}}$ ……(答)

(1) $|z|=r$, $\arg z=\theta$ より $\underline{\underline{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}}$ … (答)

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=r^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)}} \cdots (答)$$

$$\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=\underline{\underline{r\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)}} \cdots (答)$$

($\because$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より)

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると、(1)の結果より

$$w=z^2+\bar{z}\cdot\frac{1}{z}$$

$$=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2+r\cdot\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)^2$$

$$=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)+\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)$$

$$=(r^2+1)\cos2\theta+i\cdot(r^2-1)\sin2\theta \cdots ①$$

条件より $|z|=1$ のとき、$r=1$, $0\leqq\theta<2\pi$ としてよく、

このとき ①より $w=2\cos2\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

$-2\leqq 2\cos2\theta\leqq 2$ であるので、

<u>点 w が描く図形は、点 -2, 点 2 を両端とする線分。</u> … (答)

(3) 条件より $|z|=r\,(>1)$ のとき、$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

w は (2) の ① の形で表される。$w=x+yi$ なので ① より

$$x+yi=(r^2+1)\cos 2\theta+i\cdot(r^2-1)\sin 2\theta$$

$x,\ y,\ r,\ \cos 2\theta,\ \sin 2\theta$ は実数, i は虚数なので

$$x=(r^2+1)\cos 2\theta \cdots ②,\quad y=(r^2-1)\sin 2\theta \cdots ③$$

$r>1$ より $\cos 2\theta=\dfrac{x}{r^2+1}$, $\sin 2\theta=\dfrac{y}{r^2-1}$

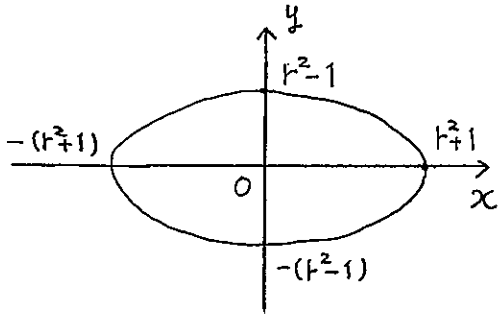
これらを $\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$ に代入して、

$$\left(\frac{x}{r^2+1}\right)^2+\left(\frac{y}{r^2-1}\right)^2=1$$

よって C は楕円であり, 方程式は $\dfrac{x^2}{(r^2+1)^2}+\dfrac{y^2}{(r^2-1)^2}=1$ …(答)

(4) 曲線 C のグラフは右図であり、

求める面積を S とする。



C 上の点 (x,y) (ただし $x\geqq 0,\ y\geqq 0$) に

対して、C の x 軸, y 軸に関する対称性より

$$\frac{S}{4}=\int_0^{r^2+1} y\,dx$$

② より、

x	$0 \to r^2+1$
θ	$\frac{\pi}{4} \to 0$

, $\dfrac{dx}{d\theta}=-2(r^2+1)\sin 2\theta$

これらと③より

$$\frac{S}{4} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (r^2-1)\sin 2\theta \cdot \{-2(r^2+1)\sin 2\theta\}\, d\theta$$

$$= 2(r^4-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= 2(r^4-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$

$$= (r^4-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= (r^4-1)\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(r^4-1)\pi$$

よって、求める面積は　$\underline{\underline{S=(r^4-1)\pi}}$ …（答）

（参考）　楕円 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$ とする。

一般に C_1 で囲まれた部分の面積は πab と表される。

5

(1) $f(x)=\log(1+x)$ より $x>0$ において, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}>0$, $f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}<0$

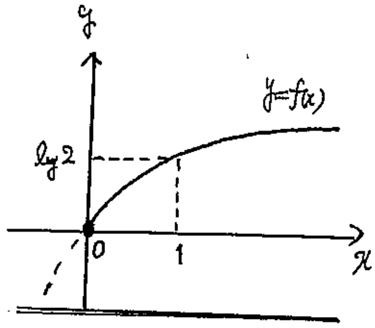
よって, $f(x)$ の増減, 凹凸は以下の通り.

x	0	
$f'(x)$		$+$
$f''(x)$		$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$

…(答)

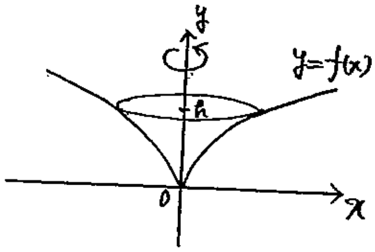
また, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ より

グラフの概形は右図



…(答)

(2) $y=\log(1+x)$ より $x=e^y-1$.



よって, 水面の高さが h になったときの容器内の

水の量 V は $V=\int_0^h \pi(e^y-1)^2dy=\pi\int_0^h(e^{2y}-2e^y+1)dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^h$

$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2h}-2e^h+h+\frac{3}{2}\right)$ …(答)

(3) (2) の結果より $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\pi(e^h-1)^2\dfrac{dh}{dt}$ ―①

また, 体積が単位時間あたり v の割合で増えることから, $\dfrac{dV}{dt}=v$ ―②

①, ② より $\pi(e^h-1)^2\dfrac{dh}{dt}=v$ $\therefore \dfrac{dh}{dt}=\dfrac{v}{\pi(e^h-1)^2}$

$h=\log 2$ のとき $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{v}{\pi(e^{\log 2}-1)^2}=\dfrac{v}{\pi(2-1)^2}=\dfrac{v}{\pi}$ …(答)

教 $\boxed{2-2}$

$f(x)=e^x$ とおくと $f'(x)=e^x$

(1) $y=f(x)$ 上の点 (t, e^t) における接線の方程式は

$y=e^t(x-t)+e^t$ つまり、$y=e^tx+e^t(1-t)$ …①

これが原点を通るとき $0=e^t(1-t)$ $e^t>0$ より $t=1$

l の方程式は①に $t=1$ を代入して

$$\underline{\underline{y=ex}} \quad \cdots(答)$$

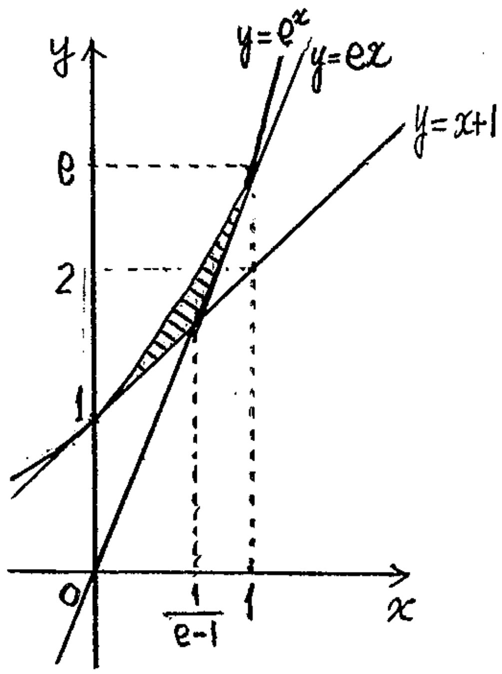
(2) 求める面積を S とする。

$y=f(x)$ 上の点 $(0, 1)$ における

接線の方程式は $y=x+1$ で

あることに注意すると S は右図の

斜線部分である。



$y=x+1$ と $y=ex$ の交点の座標は

$x+1=ex$ より $x=\frac{1}{e-1}$, 交点 $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right)$ である。

$$S=\int_0^{\frac{1}{e-1}}\{e^x-(x+1)\}dx+\int_{\frac{1}{e-1}}^1(e^x-ex)dx$$

$$=\left[e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_0^{\frac{1}{e-1}}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_{\frac{1}{e-1}}^1$$

$$=\underline{\underline{\frac{e}{2}-\frac{1}{2(e-1)}-1}} \quad \cdots(答)$$